

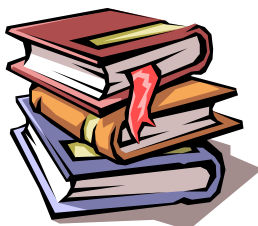
# 第十一章 线性动态电路

## 暂态过程复频域分析

**提要** 前一章研究了线性动态电路暂态过程的时域分析问题，指出在储能元件较多时，确定积分常数将十分繁杂。为此，本章介绍采用拉普拉斯变换分析线性动态电路的方法，使常微分方程问题化为代数方程问题。复频域分析法同第六章的相量法一样属于变换域分析法。本章首先简要介绍拉普拉斯变换及其基本性质，然后建立电路的复频域模型，并在此基础上讨论复频域分析法。最后讨论网络函数。

### 本章目次

- 1 拉普拉斯变换
- 2 拉普拉斯变换的基本性质
- 3 拉普拉斯逆变换
- 4 复频域中的电路定律与电路模型
- 5 用拉普拉斯变换分析线性动态电路的暂态过程
- 6 网络函数



## 11.1 拉普拉斯变换

基本要求：掌握常用函数(直流或阶跃函数、指数函数、冲激函数)的拉普拉斯变换。

拉氏变换法是一种数学积分变换，其核心是把时间函数 $f(t)$ 与复变函数 $F(s)$ 联系起来，把时域问题通过数学变换为复频域问题，把时间域的高阶微分方程变换为复频域的代数方程以便求解。

### 例 熟悉的变换

1 对数变换：把乘法运算变换为加法运算

$$\begin{array}{ccccc} A & \times & B & = & AB \\ \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\ \lg A & + & \lg B & = & \lg AB \end{array}$$

2 相量法：把时域的正弦运算变换为复数运算

$$\begin{array}{ccccc} \text{正弦量} & i_1 + i_2 & = & i & \\ & \downarrow & \downarrow & = & \uparrow \\ \text{相量} & \dot{I}_1 + \dot{I}_2 & = & \dot{I} & \end{array}$$

## 拉普拉斯变换的定义:

设函数 $f(t)$ 在  $t > 0$  及  $t = 0$  的某个邻域内有定义, 而且积分

$$\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (s \text{ 是复参量})$$

在复平面  $s$  的某一域内收敛, 则由此积分所确定的函数可写为

$$F(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (11.1)$$

式(11.1)称为函数的**拉普拉斯变换(Laplace transform)**, 简称拉氏变换。记作

$$F(s) = L \{f(t)\}$$

$F(s)$  称为  $f(t)$  的拉氏变换或称为**象函数(image function)**。

其中复参量  $s = \sigma + j\omega$ 。在电路中  $t$  代表时间,  $s$  便具有时间的倒量纲, 也即频率的量纲, 因此称为**复频率(complex frequency)**。 $F(s)$  的单位是相应  $f(t)$  的单位乘以时间  $t$  的单位。

表11.1常用函数的拉普拉斯变换对

原函数 $f(t)(t \geq 0)$	象函数 $F(s)$	原函数 $f(t)(t \geq 0)$	象函数 $F(s)$
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$t^n e^{-\alpha t}$ ( $n$ 为正整数)	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	$(1-\alpha t)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+\alpha)^2}$
$\delta(t)$	1	$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$A$	$\frac{A}{s}$	$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$A(1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{A\alpha}{s(s+\alpha)}$	$e^{-at} \sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{(s+a) \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$t^n$ ( $n$ 为正整数)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{-at} \cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{(s+a) \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{(s+a)^2 + \omega^2}$

注意:

$$1 \quad F(S) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st} dt + \int_{0^+}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

在 $t=0^-$  至 $t=0^+$   
 $f(t)=\delta(t)$ 时此项  $\neq 0$

2 象函数 $F(s)$  用大写字母表示, 如 $I(s)$ ,  $U(s)$ 。

原函数 $f(t)$  用小写字母表示, 如 $i(t)$ ,  $u(t)$ 。

3 象函数 $F(s)$  存在的条件:

$$\int_{0^-}^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt < \infty \quad e^{-st} \text{ 为收敛因子}$$

## 11.2

## 拉普拉斯变换的基本性质

基本要求：掌握常用函数拉普拉斯变换的基本性质。

### 1. 线性性质

若  $L\{f_1(t)\} = F_1(s)$ ,  $L\{f_2(t)\} = F_2(s)$ ,  $a$ 、 $b$  为任意常数, 则

$$L\{af_1(t) + bf_2(t)\} = aF_1(s) + bF_2(s)$$

$$L^{-1}\{aF_1(s) + bF_2(s)\} = af_1(t) + bf_2(t)$$

该式表明原函数线性组合的拉氏变换等于各原函数拉氏变换的同一线性组合。象函数的拉氏反变换亦有相同的线性性质。

### 例题 11.1

(1) 求  $f(t) = A(1 - e^{-at})$  的象函数  $F(s)$ 。 (2) 求  $f(t) = \sin \omega t$  的象函数  $F(s)$ 。

解

$$(1) \quad F(s) = L\{A(1 - e^{-at})\} = AL\{1\} - AL\{e^{-at}\} = \frac{A}{s} - \frac{A}{s+a} = \frac{Aa}{s(s+a)}$$

$$(2) \quad F(s) = L\{\sin \omega t\} = L\left\{\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right\}$$

$$= \frac{1}{2j} L\{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\} = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

## 2. 微分性质

若  $L \{f(t)\} = F(s)$ ，则  $L \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = sF(s) - f(0_-)$

该性质表明一个函数求导后的拉氏变换等于这个函数的拉氏变换后乘以复参量  $s$ ，再减去  $0_-$  时刻的起始值。

**推论：** 设  $L \{f(t)\} = F(s)$ ，则

$$L \{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0_-) - s^{n-2} f^{(1)}(0_-) - \dots - f^{(n-1)}(0_-)$$

**使用该性质可将关于  $f(t)$  的微分方程转化为关于  $F(s)$  的代数方程**，因此它对分析线性系统有着重要作用。

### 例题 11.2

用微分性质求  $f(t) = \cos \omega t$  的象函数  $F(s)$ 。

**解**  $F(s) = L \{ \cos \omega t \} = L \left\{ \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \sin \omega t \right\} = \frac{1}{\omega} \left( sL \{ \sin \omega t \} - \sin \omega t \Big|_{t=0_-} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

### 3. 延迟性质

若  $L\{f(t)\} = F(s)$ , 则  $L\{f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)\} = e^{-st_0}F(s)$

其中  $f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)$  表示把  $f(t)$  延迟至  $t_0$ 。

根据上述性质可以方便地求出矩形脉冲的象函数。一个高度为  $A$ , 宽度为  $t_0$  的矩形脉冲可表示为

$$f(t) = A[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-t_0)]$$

根据延迟性质得矩形脉冲的象函数为

$$F(s) = A\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-st_0}\right) = \frac{A}{s}(1 - e^{-st_0})$$

## 11.3

## 拉普拉斯逆变换

**基本要求：**掌握常用函数(直流或阶跃函数、指数函数、冲激函数)的拉普拉斯逆变换。掌握用部分分式展开法求有理分式的原函数。

**定义：**由 $F(s)$ 求 $f(t)$ 的运算称为**拉普拉斯逆变换**(inverse Laplace transform), 计算逆变换的一般公式是

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

在线性集中参数电路中，电压和电流的象函数都是 $s$ 的有理分式，可以展开成部分分式之和的形式，对每个部分分式求原函数。再根据逆变换的线性性质，将所有部分分式的原函数代数相加，就得所求象函数的原函数。

集中参数电路的象函数可以表示成下列有理分式

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

式中 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ 都是实系数的多项式，且无公因式。

## 1. $n > m$ 情况

### (1) $F_2(s)=0$ 只有单根

这时 $F(s)$ 可以展开成下列简单的部分分式之和：

$$F(s) = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{A_k}{s-p_k} + \cdots + \frac{A_n}{s-p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s-p_k} \quad (11.17)$$

式中 $p_1$ 、 $p_2$ 、 $\dots$ 、 $p_n$ 为方程 $F_2(s)=0$ 的 $n$ 个不同的根，它们可以是实数也可以是复数。由于 $s \rightarrow p_k$ 时 $|F(s)| \rightarrow \infty$ ，故这些根称为 $F(s)$ 的**极点(pole)**。 $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_n \dots$ 为待定系数。为了求出其中任何一个常数 $A_k$ ，用 $(s-p_k)$ 乘上式的两边各项得：

$$F(s)(s-p_k) = \frac{A_1(s-p_k)}{s-p_1} + \frac{A_2(s-p_k)}{s-p_2} + \cdots + A_k + \cdots + \frac{A_n(s-p_k)}{s-p_n} \quad (11.18)$$

两边取 $s \rightarrow p_k$ 时的极限，等式右边只剩下 $A_k$ ，其余全为零。于是得

$$A_k = \lim_{s \rightarrow p_k} F(s)(s - p_k) = \lim_{s \rightarrow p_k} \frac{F_1(s)(s - p_k)}{F_2(s)} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (11.19)$$

$$\begin{aligned} A_k &= \lim_{s \rightarrow p_k} \frac{F_1(s)(s - p_k)}{F_2(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow p_k} \frac{F_1(s) + F_1'(s)(s - p_k)}{F_2'(s)} = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (11.20)$$

### 洛必达法则：

设函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足下列条件：

$$(1) \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \alpha} F(x) = 0;$$

(2) 在点 $\alpha$ 的某去心邻域内 $f'(x)$ 与 $F'(x)$ 都存在，且 $F'(x) \neq 0$ ；

$$(3) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{F'(x)} \text{ 存在或为无穷大；}$$

将 $A_k$ 代入式(11.17)后，两边取拉普拉斯逆变换并利用线性性质得

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}\{F(s)\} \\ &= L^{-1}\left\{\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - p_k}\right\} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} \end{aligned} \quad (11.21)$$

$$\text{则} \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{F'(x)};$$

## 例题 11.4

已知  $F(s) = \frac{2s+1}{s^3+7s^2+10s}$ ，求它的原函数  $f(t)$ 。

**解** 令  $F_2(s) = s^3 + 7s^2 + 10s = s(s+2)(s+5) = 0$ ，求得其根为  $p_1 = 0, p_2 = -2$

$p_3 = -5$ 。因此  $F(s)$  可以展开成  $F(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s+5}$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)} \times s = 0.1$$

$$\Rightarrow A_2 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)} \times (s+2) = 0.5 \quad \Rightarrow F(s) = \frac{0.1}{s} + \frac{0.5}{s+2} + \frac{-0.6}{s+5}$$

$$A_3 = \lim_{s \rightarrow -5} \frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)} \times (s+5) = -0.6$$

$$\therefore f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 0.1 + 0.5e^{-2t} - 0.6e^{-5t} \quad (t \geq 0)$$

对于单复根情况，仍可按式(11.21)求反变换，只是要作复数运算。由于 $F_2(s)$ 的系数为实数， $F(s)$ 的复数极点均以共轭复数形式出现，且对应待定系数也是共轭关系。利用这一特点便可简化计算。设象函数为

$$F(s) = \frac{A}{s-p} + \frac{A^*}{s-p^*} \quad (11.22)$$

令 $p = a + j\beta$ ， $A = |A| \angle \theta$ ，则 $p^* = a - j\beta$ ， $A^* = |A| \angle -\theta$ ，对式(11.22)取逆变换得

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}\{F(s)\} = Ae^{pt} + A^*e^{p^*t} \\ &= |A|e^{at} [e^{j(\beta t + \theta)} + e^{-j(\beta t + \theta)}] \\ &= 2|A|e^{at} \cos(\beta t + \theta) \quad (t \geq 0) \end{aligned} \quad (11.23)$$

# 例题

## 11.5

已知  $F(s) = \frac{s+1}{s^3 + 2s^2 + 2s}$ ，求它的原函数  $f(t)$ 。

解

$F_2(s) = s^3 + 2s^2 + 2s = 0$  的根为  $p_1 = 0, p_2 = a + j\beta = -1 + j, p_3 = p_2^* = -1 - j$

$$F(s) \text{ 的展开式 } \quad F(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \frac{A_3}{s - p_3}$$

$$A_1 = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} = \frac{s+1}{3s^2 + 4s + 2} \Big|_{s=p_1} = 0.5$$

$$A_2 = \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} = \frac{s+1}{3s^2 + 4s + 2} \Big|_{s=p_2} = |A_2| \angle \theta = 0.25\sqrt{2} \angle -135^\circ$$

$$A_3 = A_2^*$$

$$\begin{aligned} \therefore f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = A_1 e^{p_1 t} + 2|A_2| e^{at} \cos(\beta t + \theta) \\ &= 0.5 + 0.5\sqrt{2} e^{-t} \cos(t - 135^\circ) \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

## (2) $F_2(s)=0$ 含有重根

为简便起见，设 $F_2(s)=0$ 含有一个 $m$ 次重根，其余为单根，则 $F_2(s)$ 可以表示为：

$$F_2(s) = a_n (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_{n-m})(s - p_n)^m \quad (11.24)$$

此时 $F(s)$ 的部分分式展开式为

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \sum_{k=1}^{n-m} \frac{A_k}{s - p_k} + \frac{B_m}{(s - p_n)^m} + \frac{B_{m-1}}{(s - p_n)^{m-1}} + \cdots + \frac{B_1}{s - p_n} \quad (11.25)$$

其中单根对应的待定系数 $A_k [k = 1, 2, \cdots, (n - m)]$ 与前面的计算相同。下面讨论重根对应的待定系数。把上式两边各乘以 $(s - p_n)^m$ ，得

$$\frac{F_1(s)}{F_2(s)} (s - p_n)^m = (s - p_n)^m \sum_{k=1}^{n-m} \frac{A_k}{s - p_k} + B_m + B_{m-1}(s - p_n) + \cdots + B_1(s - p_n)^{m-1} \quad (11.26)$$

令  $s \rightarrow p_n$ ，则上式右边除  $B_m$  项外，其余各项均变为零。而左边为  $0/0$  的不定式，取极限得

$$B_m = \lim_{s \rightarrow p_n} \frac{F_1(s)}{F_2(s)} (s - p_n)^m = \frac{F_1(s)}{a_n (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_{n-m})} \Big|_{s=p_n}$$

为了求出  $B_{m-1}$ ，把(11.26)的两边对  $s$  求一次导数，然后令  $s \rightarrow p_k$ ，则右边除  $B_{m-1}$  项以外，其各项均变为零。故得

$$B_{m-1} = \lim_{s \rightarrow p_n} \frac{d}{ds} \left[ \frac{F_1(s)}{F_2(s)} (s - p_n)^m \right]$$

仿此可得一般公式为

$$B_{m-k} = \frac{1}{k!} \lim_{s \rightarrow p_n} \frac{d^k}{ds^k} \left[ \frac{F_1(s)}{F_2(s)} (s - p_n)^m \right] \quad [k = 0, 1, \dots, (m-1)] \quad (11.27)$$

求出各系数后，从[表11.1](#)可查到 $1/(s-p_n)^k$ 的逆变换为

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-p_n)^k} \right\} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{p_n t}$$

对式[\(11.25\)](#)右边的每一项取逆变换，得 $F_2(s)=0$ 含有重根时的原函数为

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\} = \sum_{k=1}^{n-m} A_k e^{p_k t} + \left[ \frac{B_m}{(m-1)!} t^{m-1} + \frac{B_{m-1}}{(m-2)!} t^{m-2} + \cdots + B_1 \right] e^{p_n t} \\ &= \sum_{k=1}^{n-m} A_k e^{p_k t} + \left[ \sum_{k=1}^m \frac{B_{m-k+1}}{(m-k)!} t^{m-k} \right] e^{p_n t} \quad (t \geq 0) \end{aligned} \tag{11.28}$$

## 例题 11.6

已知  $F(s) = \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2}$ ，求它的原函数  $f(t)$ 。

解

$F_2(s)$  存在两个单根和一个2重根， $F(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{B_2}{(s+2)^2} + \frac{B_1}{s+2}$   
其展开式为：

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2} s = 1$$

$$B_2 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2} (s+2)^2 = 22$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2} (s+1) = -14 \quad B_1 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left[ \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2} (s+2)^2 \right] = 13$$

$$\begin{aligned} \therefore f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = A_1 + A_2 e^{-t} + (B_2 t + B_1) e^{-2t} \\ &= 1 - 14e^{-t} + (22t + 13)e^{-2t} \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

## 2. $n \leq m$ 情况

- ① 把  $F_1(s)$  和  $F_2(s)$  均按降幂排列;
- ② 用分母多项式  $F_2(s)$  去除分子多项式  $F_1(s)$ ，把象函数  $F(s)$  化成一个  $s$  的多项式与一个分式之和的形式。
- ③ 这个分式的分子最高次幂低于分母最高次幂，仍可用式(11.21)求其原函数。
- ④  $s$  的多项式的原函数为冲激函数及其导数的代数和。

## 例题 11.7

已知  $F(s) = \frac{s^4 + 9s^3 + 24s^2 + 22s + 1}{s^3 + 7s^2 + 10s}$ ，求它的原函数  $f(t)$ 。

**解** 用分母多项式去除分子多项式得

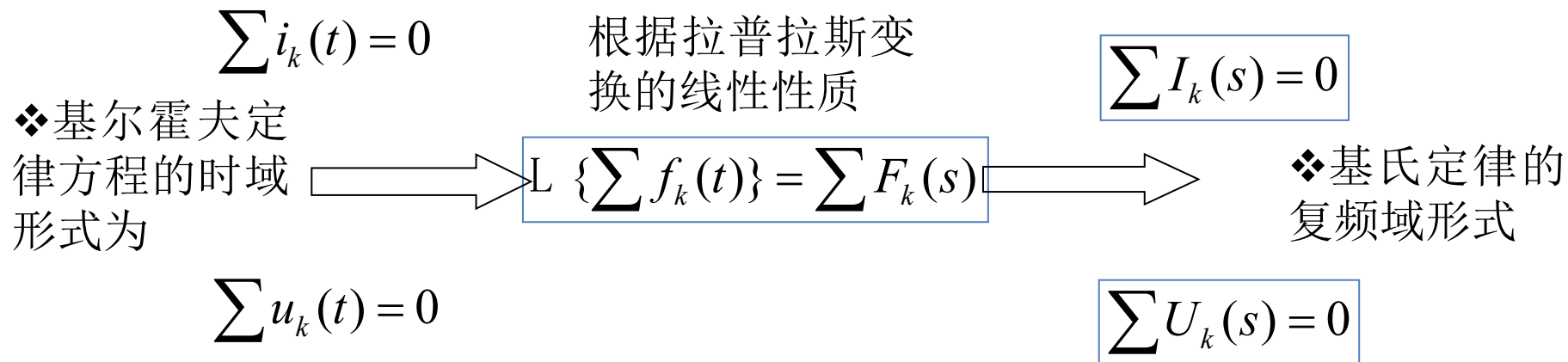
$$\begin{array}{r} s + 2 \\ s^3 + 7s^2 + 10s \overline{) s^4 + 9s^3 + 24s^2 + 22s + 1} \\ \underline{s^4 + 7s^3 + 10s^2} \phantom{+ 1} \\ 2s^3 + 14s^2 + 22s + 1 \\ \underline{2s^3 + 14s^2 + 20s} \phantom{+ 1} \\ 2s + 1 \end{array}$$

$$\therefore F(s) = s + 2 + \frac{2s + 1}{s^3 + 7s^2 + 10s}$$

$$\therefore f(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + 0.1 + 0.5e^{-2t} - 0.6e^{-5t}$$

基本要求：熟练掌握复频域形式的电路定律以及 $R$ 、 $L$ 、 $C$ 等元件的电路模型。正确确定附加电源。掌握建立复频域电路模型的方法。

### 1. 复频域中的基尔霍夫定律



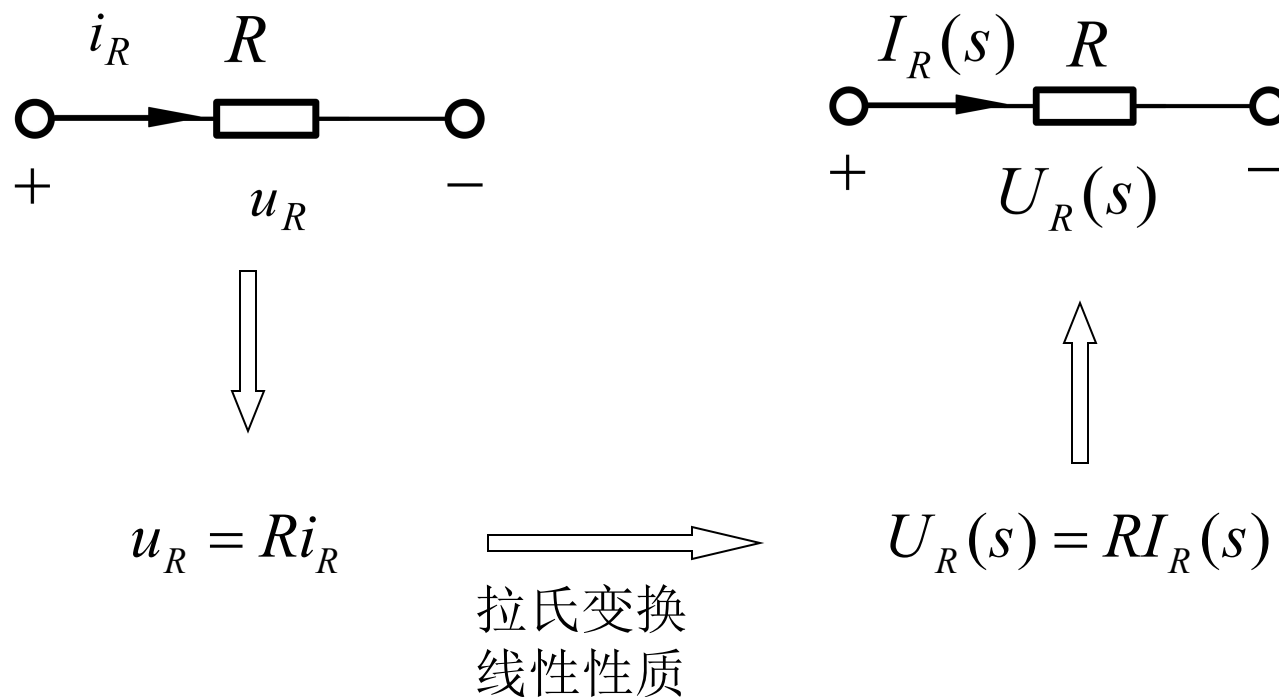
在集中参数电路中，流出(入)节点的各支路电流象函数的代数和为零。

在集中参数电路中，沿任一回路各支路电压象函数的代数和为零。

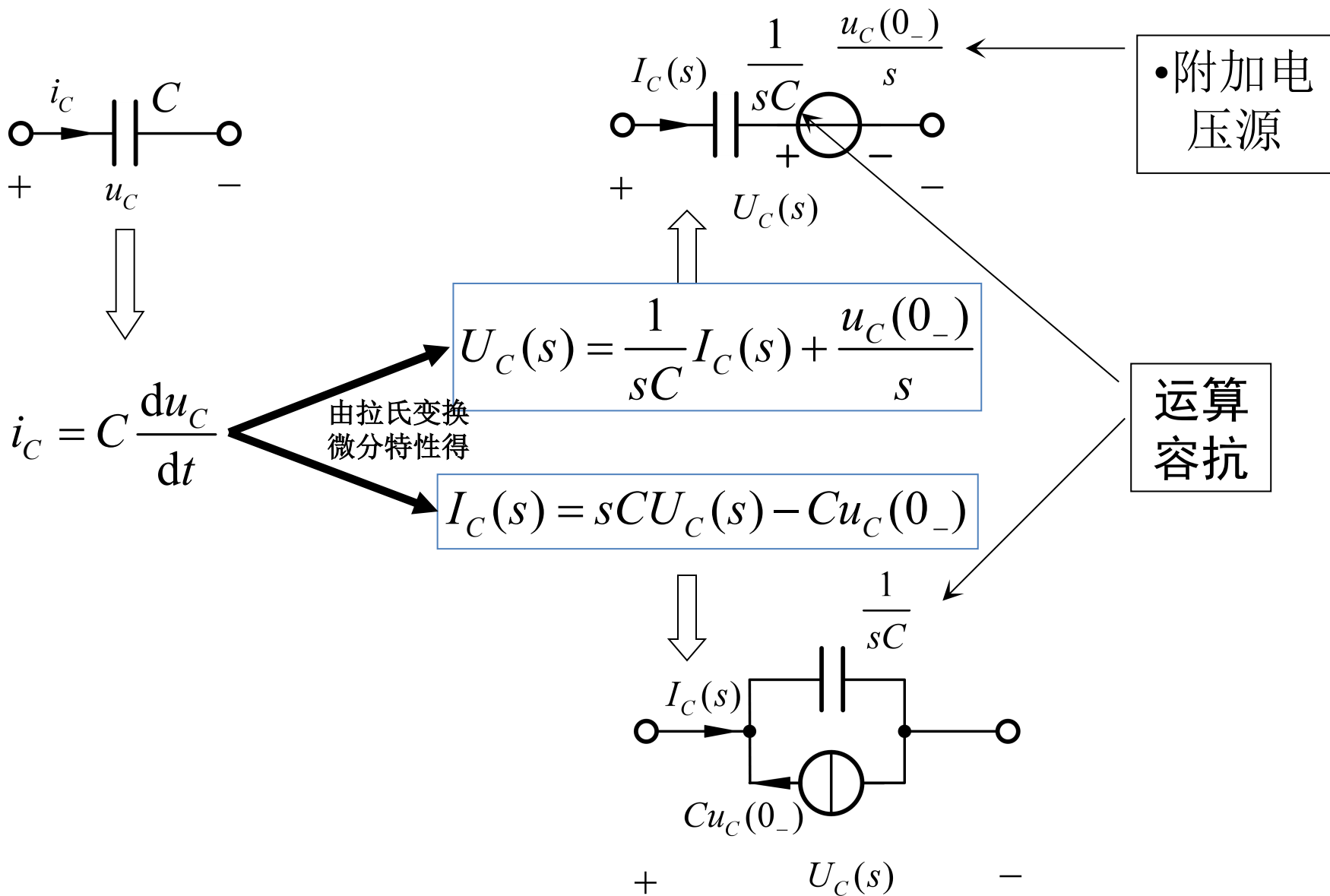
❖ 根据拉普拉斯变换的定义可知，电流、电压象函数的单位分别为安秒(As)即库仑和伏秒(Vs)即韦伯。

## 2. 复频域中元件电压与电流关系及元件的复频域模型

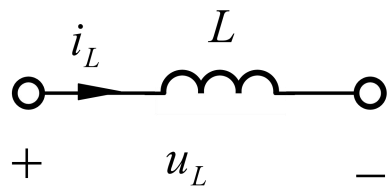
### (1) 电阻元件



## (2) 电容元件



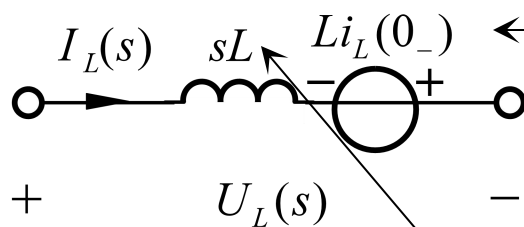
### (3) 电感元件



$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

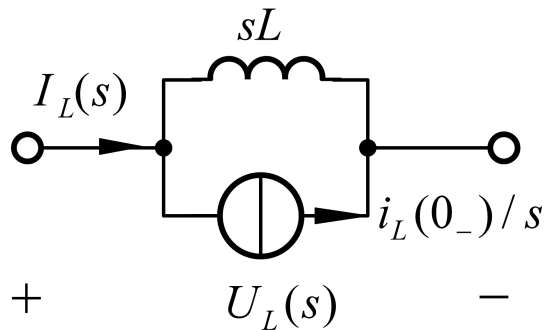
由拉氏变换  
微分特性得

$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_-)$$

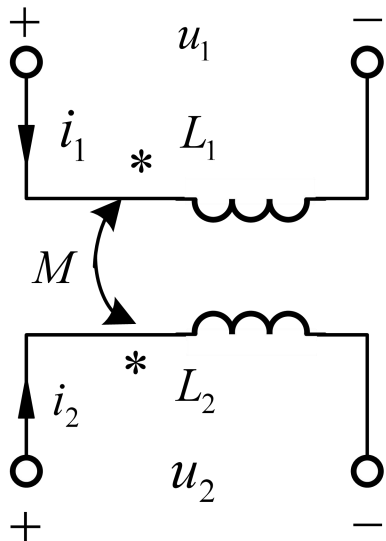


附加电  
压源

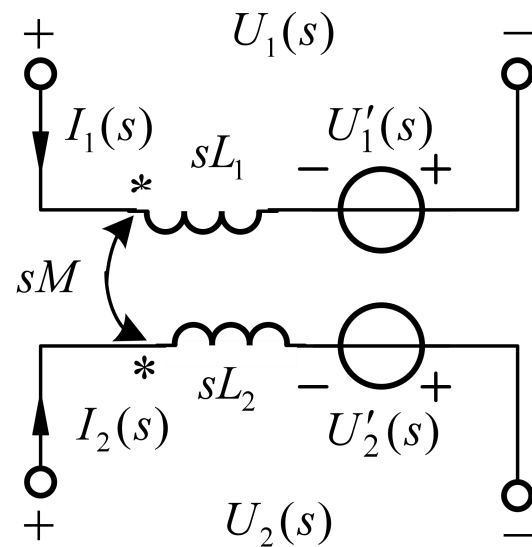
运算  
感抗



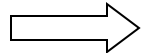
## (4) 互感元件



$$\begin{cases} U_1'(s) = L_1 i_1(0_-) + M i_2(0_-) \\ U_2'(s) = M i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-) \end{cases}$$



$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$



$$\begin{cases} U_1(s) = sL_1 I_1(s) + sM I_2(s) - L_1 i_1(0_-) - M i_2(0_-) \\ U_2(s) = sM I_1(s) + sL_2 I_2(s) - M i_1(0_-) - L_2 i_2(0_-) \end{cases}$$

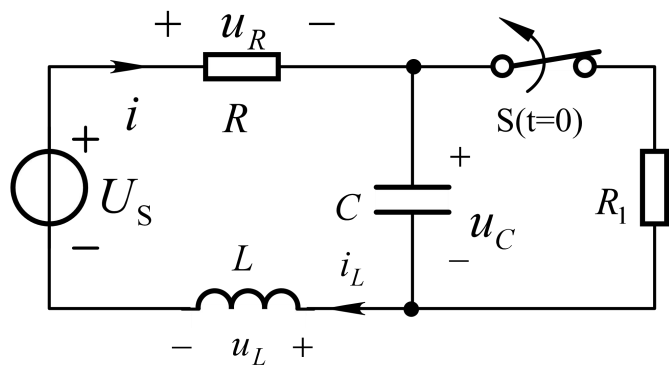


## 复频域中电路元件方程的特点

将电感、电容和互感等元件的微、积分方程简化成为复频域里的线性代数方程。

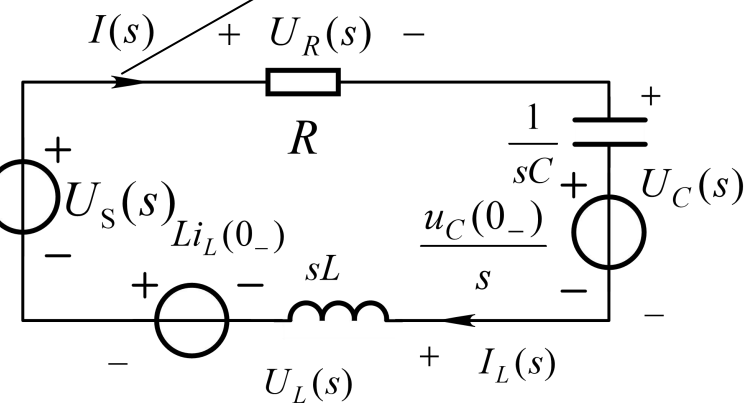
### 3. 复频域电路模型 运算阻抗与运算导纳

运算电路



时域电路模型

$t > 0$



复频域电路模型

KVL

$$U_R(s) + U_C(s) + U_L(s) = U_S(s) \quad (R + sL + \frac{1}{sC})I(s) = U_S(s) + Li_L(0_-) - \frac{u_C(0_-)}{s}$$

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$$

$$\frac{1}{Z(s)} = Y(s)$$

运算阻抗

运算导纳

零状态

$$\frac{U_S(s)}{I(s)} = Z(s)$$

$$\frac{I(s)}{U_S(s)} = Y(s)$$

**基本要求：**理解在直流电路中建立的各种分析方法、定理和公式均可推广用于复频域电路模型的原理。熟练掌握线性动态电路暂态过程复频域分析法的一般步骤。

### 原理：

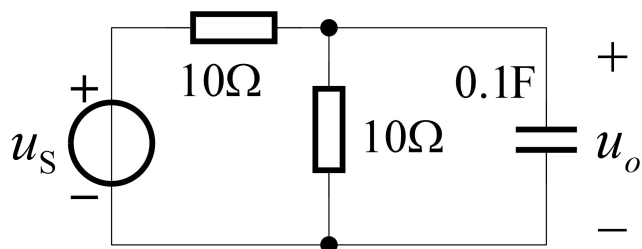
针对直流电路提出的各种分析方法、定理和公式均可推广用于复频域中的运算电路。具体地说：只须将以前方程和公式中的电阻推广为运算阻抗，将电导推广为运算导纳，将恒定电压、电流推广为电压、电流象函数，将附加电源与独立电源同样对待，就可用计算直流电路的方法计算运算电路。

### 步骤：

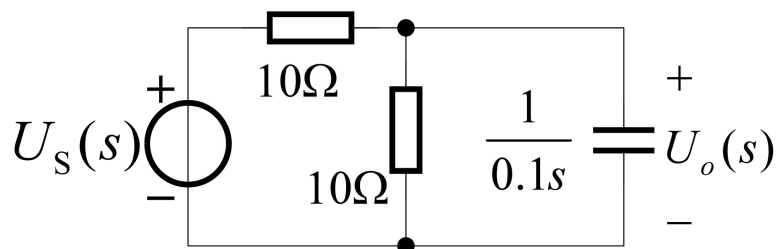
1. 由换路前的电路求出全部电容的 $u_C(0_-)$ 和全部电感的 $i_L(0_-)$ ，并将激励的时域函数变换成象函数。
2. 根据换路后的电路画出运算电路。其中 $u_C(0_-)$   $i_L(0_-)$ 和的作用用附加电源表示，参数（ $R$ 、 $L$ 、 $C$ ）用复频域阻抗表示，已知的和待求的电压电流均用象函数表示。
3. 将求解直流电路的方法（等效化简或列电路方程）推广用于运算电路，求出响应的象函数。
4. 利用部分分式展开法或积分变换表将响应的象函数变换为原函数。

## 例题 11.8

电路如图(a)所示,  $u_s=20e^{-t}\varepsilon(t)$  V, 电路为零状态。求 $t \geq 0$ 时 $u_o$ 的变化规律。



(a)



(b)

解

电源的象函数为  $U_S(s) = \frac{20}{s+1}$  Vs

复频域电路模型如图(b)所示。

其节点电压方程为:

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + 0.1s\right)U_o(s) = \frac{U_S(s)}{10} = \frac{2}{s+1}$$

$$U_o(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2}$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{20}{(s+1)(s+2)} \times (s+1) = 20$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{20}{(s+1)(s+2)} \times (s+2) = -20$$

$$\therefore u_o(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_o(s)\} = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} = 20(e^{-t} - e^{-2t})\text{V} \quad t \geq 0$$

## 例题 11.9

电路如图(a)所示,  $t < 0$ 时处于稳态,  $t = 0$ 时开关断开。已知  $U_S = 30\text{V}$ ,  $R_1 = 25\ \Omega$ ,  $R_2 = 75\ \Omega$ ,  $L = 0.5\text{H}$ ,  $C = 5 \times 10^{-3}\text{F}$ 。求  $t > 0$ 时的全响应  $u_L$ 和  $u_C$ 。

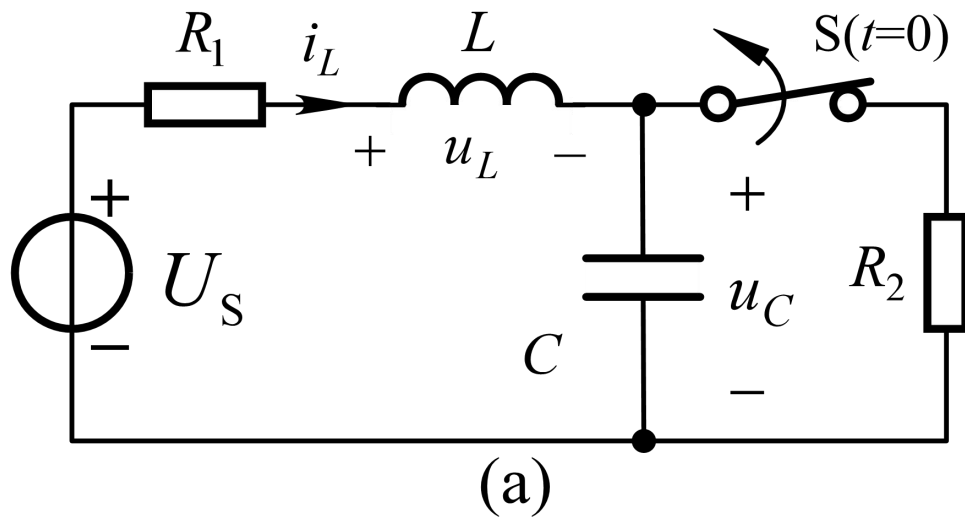


图11.7 例题11.9

# 例题 11.9

解

$$U_S(s) = \mathcal{L}\{U_S\} = \frac{U_S}{s} = \frac{30}{s} \text{ V/s}$$

$t < 0$ 时，电感相当于短路，电容相当于开路，因此初始值：

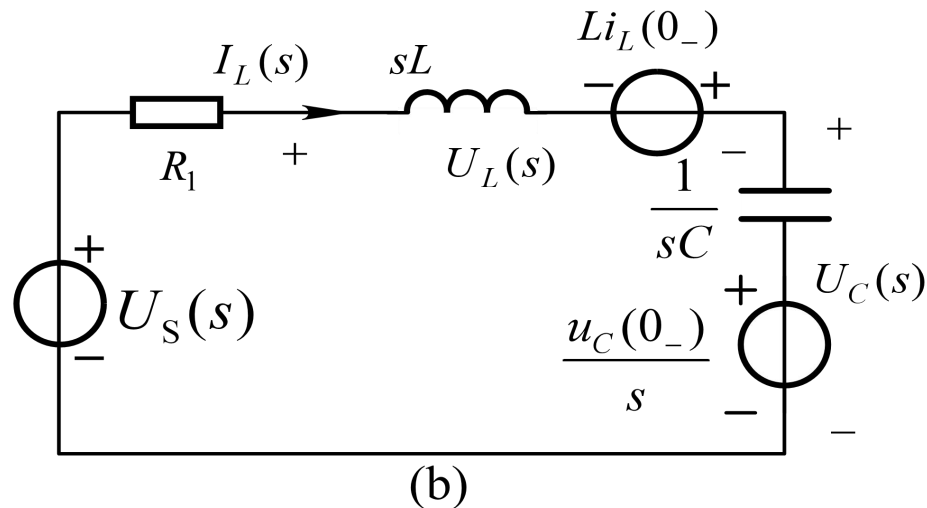
$$i_L(0_-) = \frac{U_S}{R_1 + R_2} = 0.3 \text{ A}$$

$$u_C(0_-) = R_2 i_L(0_-) = 22.5 \text{ V}$$

$$I_L(s) = \frac{U_S(s) + Li_L(0_-) - u_C(0_-)/s}{R_1 + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{30}{s} + 0.5 \times 0.3 - \frac{22.5}{s}}{25 + 0.5s + \frac{1}{5 \times 10^{-3}s}} = \frac{0.3s + 15}{s^2 + 50s + 400}$$

**注意：** 必须包括附加电压源的电压。

$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_-) = \frac{-60}{s^2 + 50s + 400}$$



(b) 复频域电路模型

$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I_L(s) + \frac{u_C(0_-)}{s} = \frac{22.5s^2 + 1185s + 12000}{s(s^2 + 50s + 400)}$$

求 $U_L(s)$ 的部分分式展开式:

$$U_L(s) = \frac{-60}{(s+10)(s+40)} = \frac{A_1}{s+10} + \frac{A_2}{s+40}$$

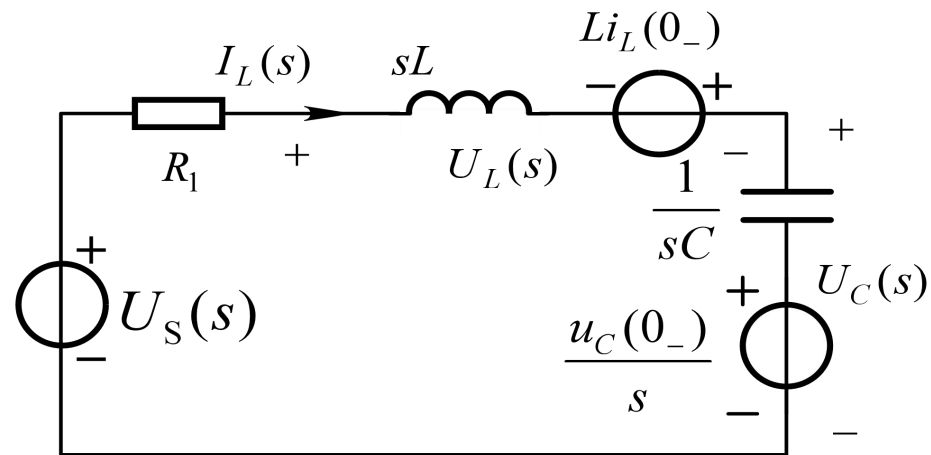
$$A_1 = \lim_{s \rightarrow -10} \frac{-60}{(s+10)(s+40)} \times (s+10) = -2$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -40} \frac{-60}{(s+10)(s+40)} \times (s+40) = 2$$

$$U_L(s) = \frac{-60}{(s+10)(s+40)} = \frac{-2}{s+10} + \frac{2}{s+40}$$

同理求得 $U_C(s)$ 的部分分式展开式为

$$U_C(s) = \frac{22.5s^2 + 1185s + 12000}{s(s+10)(s+40)} = \frac{30}{s} + \frac{-8}{s+10} + \frac{0.5}{s+40}$$



(b)

复频域电路模型

所以待求响应的时间函数为：

$$u_L = \mathcal{L}^{-1}\{U_L(s)\} = (-2e^{-10t} + 2e^{-40t})\text{V} \quad (t > 0)$$

$$u_C = \mathcal{L}^{-1}\{U_C(s)\} = (30 - 8e^{-10t} + 0.5e^{-40t})\text{V} \quad (t \geq 0)$$

在图(b)所示的复频域电路模型中，如果令附加电源为零，仅由 $U_s(s)$ 作用产生的响应便是零状态响应；反之，如果 $U_s(s) = 0$ ，则仅由附加电源作用产生的响应便是零输入响应。

## 例题 11.10

电路如图(a)所示，已知 $R_1=9\ \Omega$ ， $R_2=1\ \Omega$ ， $C_1=1\text{F}$ ， $C_2=4\text{F}$ ，外加电压 $u_S=10\varepsilon(t)\text{ V}$ ，电路为零状态。求电流 $i$ 和电压 $u_O$ 。

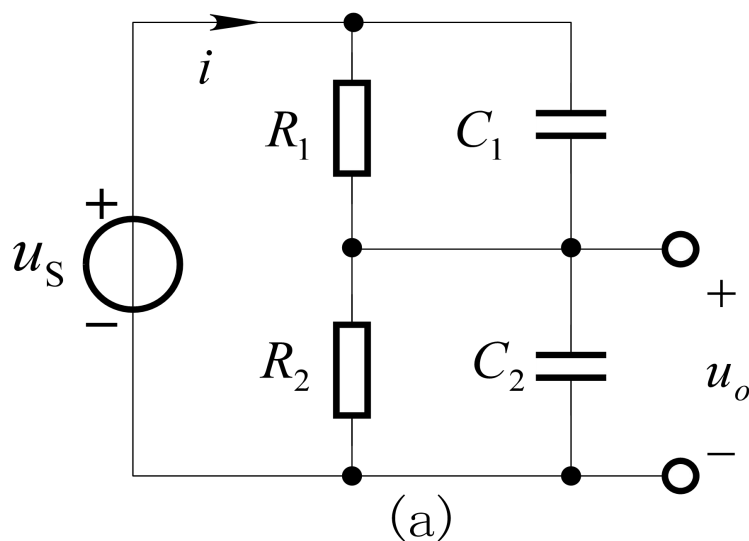


图11.8 例题11.10

解

电路是零状态，故运算电路中无附加电源。外加阶跃电压的象函数为

$$U_s(s) = 10/s \text{ Vs}$$

从电源看进去的等效复频域阻抗为

$$Z(s) = \frac{R_1 \times \frac{1}{sC_1}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} + \frac{R_2 \times \frac{1}{sC_2}}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{R_1 R_2 (C_1 + C_2)s + R_1 + R_2}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)} = \frac{45s + 10}{(9s + 1)(4s + 1)}$$

电流*i*的象函数为

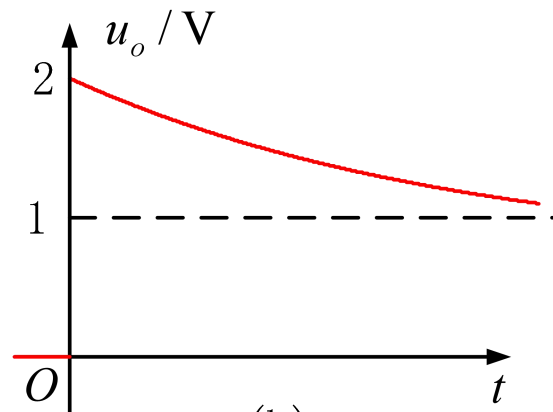
$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{U_s(s)}{Z(s)} = \frac{10(9s + 1)(4s + 1)}{s(45s + 10)} = \frac{36s^2 + 13s + 1}{4.5s^2 + s} \\ &= 8 + \frac{5s + 1}{s(4.5s + 1)} = 8C + \frac{1A}{s} + \frac{(1/9)A}{s + 1/4.5} \end{aligned}$$

$$\therefore i = 8C \times \delta(t) + \left(1 + \frac{1}{9}e^{-t/4.5}\right)\varepsilon(t)A \quad (\text{C表示电荷的单位即库仑})$$

电流 $u_o$ 的象函数为

$$U_o(s) = I(s) \times \frac{R_2 \times \frac{1}{sC_2}}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{9s+1}{s(4.5s+1)}$$
$$= \frac{1V}{s} + \frac{1V}{s+1/4.5}$$

$$\therefore u_o = (1 + e^{-t/4.5})V \quad t > 0$$



(b)  
 $u_o$ 随时间变化的曲线

在图 (b)中画出了 $u_o$ 随时间变化的曲线。图中， $u_o(0_-)=0$ ， $u_o(0_+)=2V$ ，故电容上的电压发生了“强迫跃变”，这是冲激电流  $\delta C \times \delta(t)$  给  $C_2$  充电的结果。但在计算过程中并不考虑是否发生跃变，原因是复频域分析法用的是0时刻而不是 $0_+$ 时刻的初始值。**因此，在处理“跃变”问题时，复频域法要比时域分析法有一定的优越性。**

## 例题 11.11

电路如图(a)所示, 已知 $i_s=1\text{C}\times\delta(t)$ , 求冲激响应 $u_C$ 。

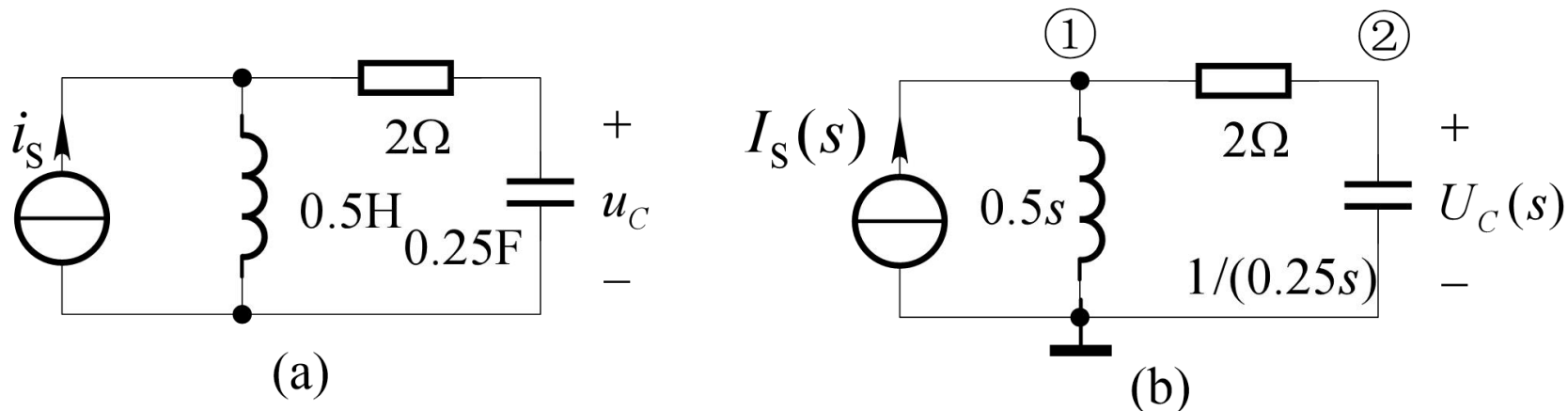


图11.9 例题11.11

解

电路为零状态, 运算电路如图(b)所示, 其中

$$I_S(s) = \mathcal{L}\{i_s\} = \mathcal{L}\{\delta(t)As\} = 1 \text{ As}$$

对其列写节点电压方程:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{0.5s} + 0.5\right)U_{n1}(s) - 0.5U_{n2}(s) = 1 & (1) \\ -0.5U_{n1}(s) + (0.5 + 0.25s)U_{n2}(s) = 0 & (2) \end{cases}$$

求解得电压象函数  $U_{n1}(s) = \frac{2s(s+2)}{s^2+4s+8}$        $U_{n2}(s) = \frac{4s}{s^2+4s+8} = U_C(s)$

令的分母多项式为零，即  $s^2+4s+8=0$

得其极点为：  $p_{1,2} = (-2 \pm j2) = a \pm j\beta$

它们是一对共轭复数。故  $U_C(s)$  的部分分式展开式为

$$U_C(s) = \frac{A_1}{s - (-2 + j2)} + \frac{A_2}{s - (-2 - j2)}$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow p_1} U_C(s)(s - p_1) = 2\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{V} = |A_1| \angle \theta \quad A_2 = A_1^*$$

$$\therefore u_C = 2|A_1| e^{at} \cos(\beta t + \theta) = 4\sqrt{2} e^{-2t} \cos(2t + 45^\circ) \text{V} \quad t > 0$$

## 例题 11.12

电路如图所示，已知 $R=1\ \Omega$ ， $L=1\text{H}$ ， $C=0.2\text{F}$ ， $g=1\text{s}$ ， $u_s=6\varepsilon(t)\text{V}$ ， $i_s=4C\times\delta(t)$ 。求 $t>0$ 时的零状态响应 $u_L$ 和 $u_C$ 。

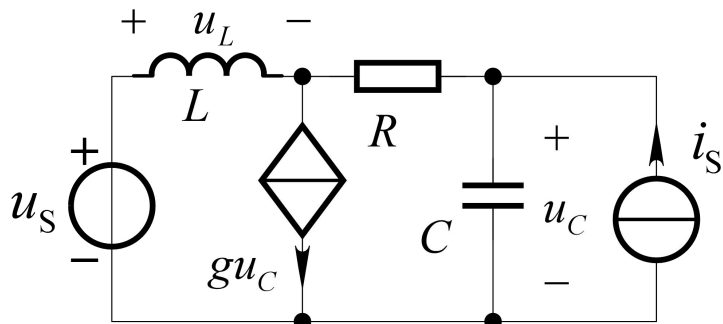


图11.10 例题11.12

解

电路为零状态，其复频域模型中不含附加电源，列节点电压方程：

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{sL} + \frac{1}{R}\right)U_1(s) - \frac{1}{R}U_2(s) = \frac{U_s(s)}{sL} - gU_C(s) \\ -\frac{1}{R}U_1(s) + \left(sC + \frac{1}{R}\right)U_2(s) = I_s(s) \\ U_C(s) = U_2(s) \end{cases} \quad (1)$$

其中电源的象函数为:

$$U_s(s) = \mathbf{L}\{u_s\} = \frac{6}{s} \text{ (Vs)}$$

$$I_s(s) = \mathbf{L}\{i_s\} = 4 \text{ As}$$

将已知条件代入式(1), 得

$$\begin{cases} (s+1)U_1(s) = \frac{6}{s} \\ -U_1(s) + (0.2s+1)U_2(s) = 4 \end{cases}$$

联立解得

$$\begin{cases} U_1(s) = \frac{6}{s(s+1)} \\ U_2(s) = \frac{20s^2 + 20s + 30}{s(s+1)(s+5)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_L(s) = U_s(s) - U_1(s) = \frac{6}{s+1} \\ U_C(s) = U_2(s) = \frac{6}{s} + \frac{-7.5}{s+1} + \frac{21.5}{s+5} \end{cases}$$

$$\therefore u_L = \mathbf{L}^{-1}\{U_L(s)\} = 6e^{-t} \text{V} \quad (t > 0)$$

$$u_C = \mathbf{L}^{-1}\{U_C(s)\} = (6 - 7.5e^{-t} + 21.5e^{-5t}) \text{V} \quad (t > 0)$$

## 例题 11.13

电路如图(a)所示, 已知 $R_1=1\Omega$ ,  $R_2=1.5\Omega$ ,  $u_S$ ,  $i_S$ 为阶跃函数。当a、b端接 $R_3=3\Omega$ 电阻时, 全响应 $i=(2+2e^{-50t})\varepsilon(t)\text{A}$ 。现将a、b端改接 $L=0.25\text{H}$ 的零状态电感, 求此时的电压 $u_{ab}$ 。

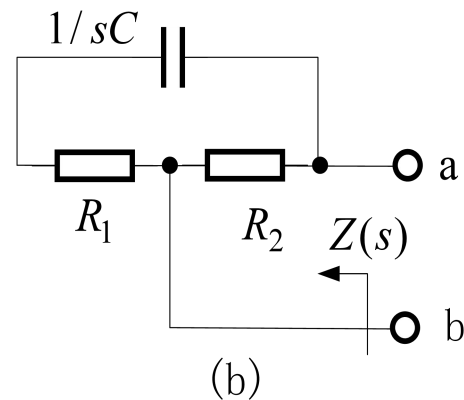
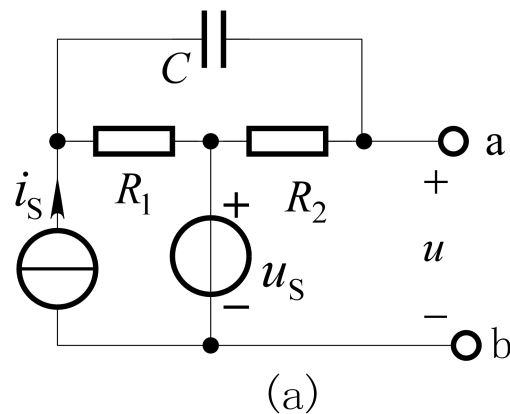
**解** 先求出复频域戴维南等效电路。由题给全响应知当a、b端接 $R_3=3\Omega$ 电阻的时间常数为

$$\tau = \frac{1}{50} \text{ s}$$

根据电路可得  $\tau = RC = (R_1 + \frac{R_2 \times 3}{R_2 + 3})C = 2C$

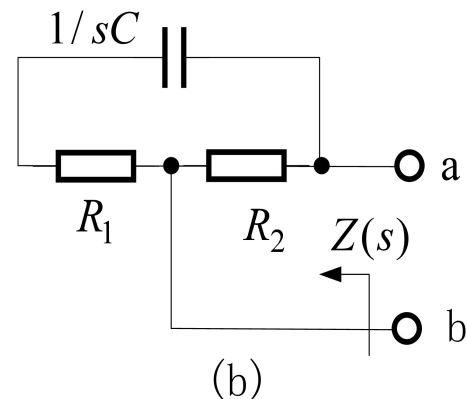
所以  $C = \frac{\tau}{2} = 0.01\text{F}$

将电压源和电流源置零, 如图(b)所示,



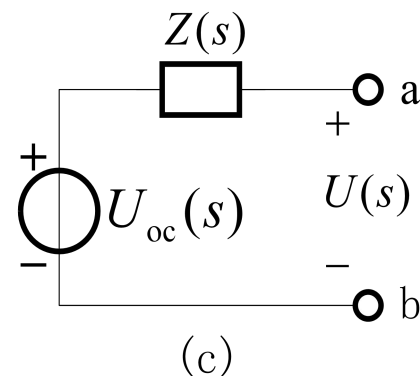
得a、b端等效运算阻抗为

$$Z(s) = \frac{R_2(R_1 + \frac{1}{sC})}{R_2 + R_1 + \frac{1}{sC}} = \frac{0.6s + 60}{s + 40}$$



由已知电流*i*得  $I(s) = \mathcal{L}\{i\} = \left(\frac{2}{s} + \frac{2}{s+50}\right) = \frac{4s+100}{s(s+50)}$

a、b端开路电压为  $U_{oc}(s) = I(s)[Z(s) + R_3] = \frac{14.4s+360}{s(s+40)}$



戴维南等效电路如图 (c)所示。

戴维南等效电路

当a、b端接 $L=0.25\text{H}$ 的零状态电感时，电感电压象函数为：

$$U_{ab}(s) = \frac{sL}{sL + Z(s)} U_{oc}(s) = \frac{14.4s + 360}{s^2 + 42.4s + 240} \approx \frac{9.09}{s + 6.73} + \frac{5.31}{s + 35.67}$$

$$\therefore u_{ab} = \mathcal{L}^{-1}\{U_{ab}(s)\} = (9.09e^{-6.73t} + 5.31e^{-35.67t})\text{V} \quad (t > 0)$$

## 11.6 网络函数

基本要求：理解复频域网络函数  $H(s)$  的定义及其原函数的含义。了解  $H(s)$  与复数形式网络函数  $H(j\omega)$  的关系。了解网络函数极点在福平面上的位置与单位冲激特性的关系。

### 一、网络函数 (network function)

1. 定义：零状态响应的象函数  $Y(s)$  与激励的象函数  $X(s)$  之比称为(复频域中的)网络函数，用符号表示  $H(s)$ ，即

$$H(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (11.41)$$

注：当电路为零状态时，在复频域电路中无附加电源， $Y(s)$  与外加  $X(s)$  成正比，此时  $H(s)$  与  $X(s)$  无关。

2. 与单位冲激特性的关系：根据单位冲激特性的定义及齐性原理，当激励  $x(t)=K\delta(t)$  时，零状态响应为  $y(t)=Kh(t)$ ，则

$$H(s) = \frac{L \{y(t)\}}{L \{x(t)\}} = \frac{L \{Kh(t)\}}{L \{K\delta(t)\}} = \frac{KL \{h(t)\}}{K} = L \{h(t)\}$$

因此，网络函数就是网络单位冲激特性的象函数；反之，网络函数的原函数就是网络的单位冲激特性，即

$$\begin{aligned} H(s) &= L \{h(t)\} \\ h(t) &= L^{-1} \{H(s)\} \end{aligned} \tag{11.42}$$

网络函数  $H(s)$  和单位冲激特性  $h(t)$  都反映网络的固有性质。

3. 若已知网络函数和外加激励的象函数，则零状态响应象函数为

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} \quad (11.43)$$

式中  $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ ,  $X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ ,  $N$ 、 $P$ 、 $D$ 、 $Q$  都是  $s$  的多项式。

用部分分式展开求  $Y(s)$  的原函数时， $F_2(s) = D(s)Q(s) = 0$  的根将包括  $D(s) = 0$  及  $Q(s) = 0$  的根。响应中与  $Q(s) = 0$  的根对应的那些项与外加激励的函数形式相同，属于**强制分量**；而与  $D(s) = 0$  的根(即网络函数的极点)对应的那些项的性质由网络的结构与参数决定，属于**自由分量**。**因此，网络函数极点的性质决定了网络暂态过程的特性。**

## 例题 11.14

电路如图所示，已知 $R=0.5$ ， $L=1\text{H}$ ， $C=1\text{F}$ ， $a=0.25$ 。

- 1) 定义网络函数  $H(s) = \frac{I_2(s)}{U_S(s)}$ ，求 $H(s)$ 及其单位冲激特性 $h(t)$
- 2) 求当  $u_s(t) = 3e^{-t}\varepsilon(t)\text{V}$  时的响应  $i_2(t)$ 。

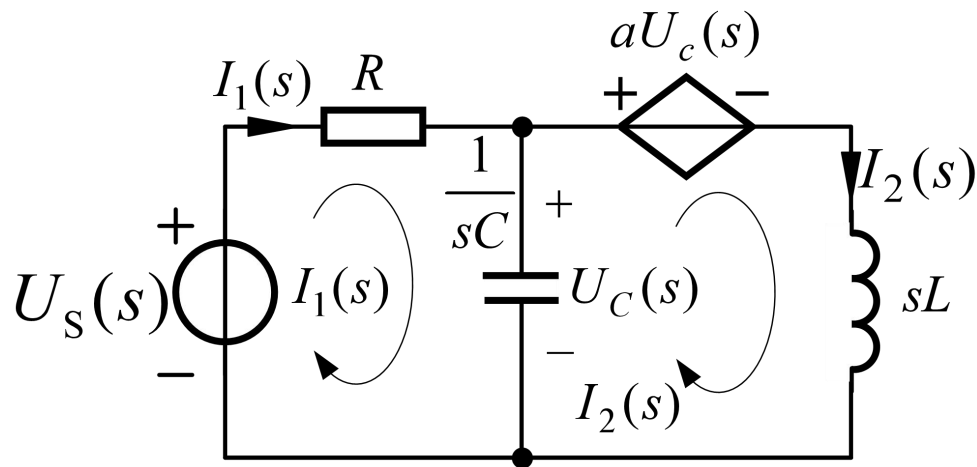


图11.13 例题11.14

解

(1) 列回路电流方程:

$$\begin{cases} (R + \frac{1}{sC})I_1(s) - \frac{1}{sC}I_2(s) = U_S(s) \\ -\frac{1}{sC}I_1(s) + (\frac{1}{sC} + sL)I_2(s) = -aU_C(s) \\ U_C(s) = \frac{1}{sC}[I_1(s) - I_2(s)] \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{代数整理得}} \begin{cases} (0.5s + 1)I_1(s) - I_2(s) = sU_S(s) \\ -0.75I_1(s) + (s^2 + 0.75)I_2(s) = 0 \end{cases}$$

$$I_2(s) = \frac{1.5U_S(s)}{s^2 + 2s + 0.75} \Rightarrow H(s) = \frac{I_2(s)}{U_S(s)} = \frac{1.5}{s^2 + 2s + 0.75} = \frac{1.5}{s + 0.5} + \frac{-1.5}{s + 1.5}$$

$$\therefore h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = 1.5(e^{-0.5t} - e^{-1.5t})(\Omega s)^{-1} \times \varepsilon(t)$$

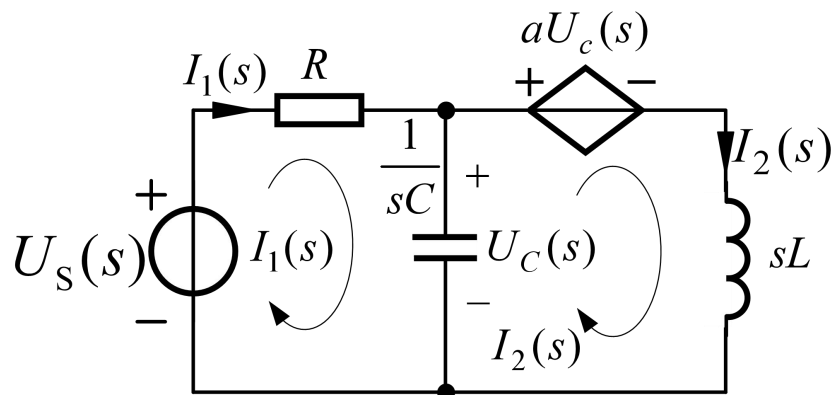


图11.13 例题11.14

(2) 当  $u_s(t) = 3e^{-t}\varepsilon(t)\text{V}$  时

$$U_s(s) = \mathcal{L}\{u_s(t)\} = \frac{3\text{V}}{s+1}$$

$$I_2(s) = H(s)U_s(s) = \frac{1.5}{s^2 + 2s + 0.75} \cdot \frac{3}{(s+1)}$$

$$= \frac{1.5}{(s+0.5)(s+1.5)} \cdot \frac{3}{(s+1)}$$

$$= \frac{9\text{A}}{s+0.5} + \frac{9\text{A}}{s+1.5} + \frac{-18\text{A}}{s+1}$$

∴

$$i_2(t) = (9e^{-0.5t} + 9e^{-1.5t} - 18e^{-t})\text{A} \quad (t \geq 0)$$

## 二、网络函数的极点位置与单位冲激特性的关系

如前所述，网络函数与单位冲激特性构成拉普拉斯变换对，单位冲激特性的性质取决于网络函数的极点性质，即取决于极点在复平面上的位置。

**要点：由极点在复平面上的分布来判断暂态特性。**

分析一阶极点情况：若网络函数仅含一阶极点，且 $n>m$ ，则网络函数可展开成

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - p_k} \quad (11.44)$$

其中极点 $p_1$ 、 $p_2$ 、 $\dots$ 、 $p_n$ 称为**网络函数的自然频率**，它只与网络结构与参数有关。

网络的单位冲激特性为

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} \quad (11.45)$$

可见它与极点位置有关。

## 二、网络函数的极点位置与单位冲激特性的关系

$$h(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}$$

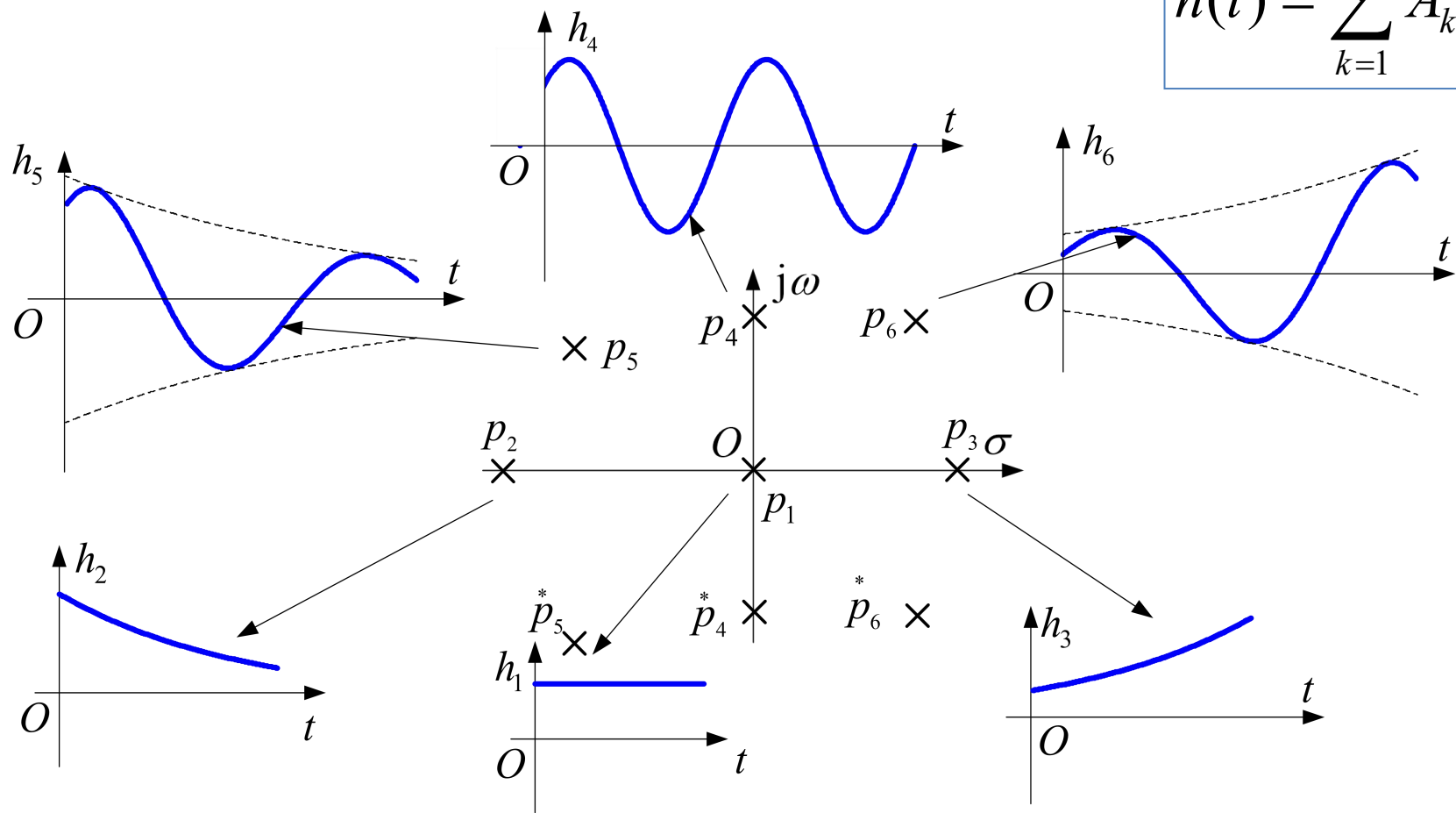
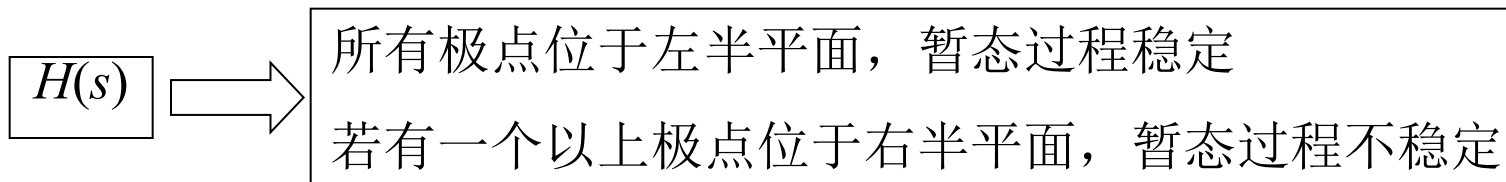
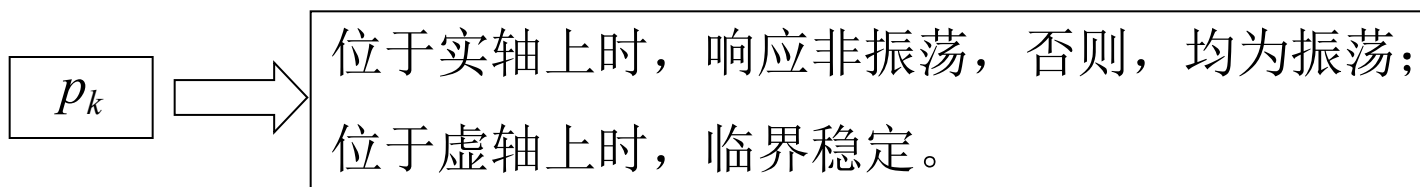
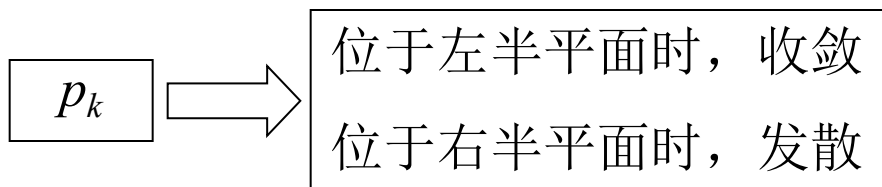
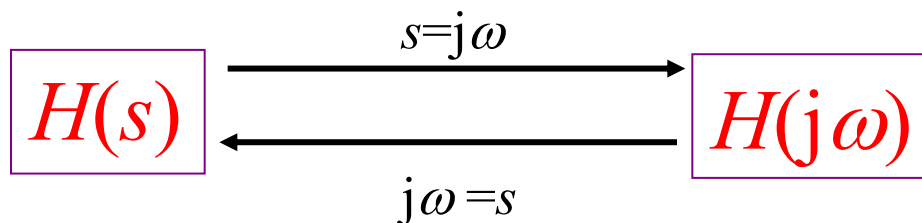


图11.14  $H(s)$ 的极点与单位冲激特性的关系

网络函数的极点位置与单位冲激特性的关系概括如下：



### 三、复频域网络函数与复数网络函数的关系



$$\left\{ \begin{array}{l} h(t) \rightarrow H(s) \rightarrow H(j\omega) \\ H(j\omega) \rightarrow H(s) \rightarrow h(t) \end{array} \right.$$

## 例题 11.15

设图所示二端口网络为线性无独立源网络。

- 1) 已知当  $u_i = 1\text{Wb} \times \delta(t)$  时，零状态响应  $u_o = 1\text{Wb} \times \delta(t) + (e^{-t} - 4e^{-2t})\varepsilon(t)\text{V}$ 。  
求  $u_i = 3\sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t)\text{V}$  时的正弦电压  $u_o$ 。
- 2) 若已知  $H(j\omega) = \frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i} = \frac{j\omega}{-\omega^2 + j5\omega + 6}$ ，求单位冲激特性  $h(t)$ 。

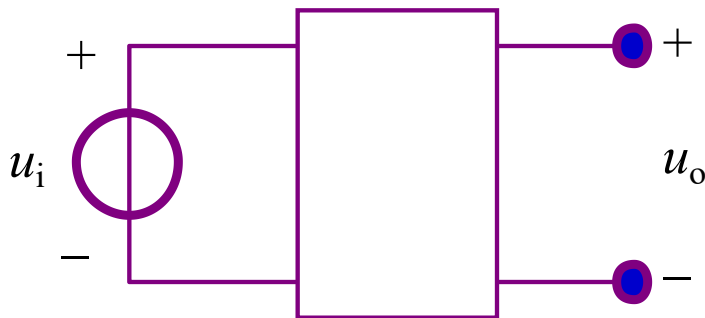


图11.15 例题11.15

**解** (1) 电路的复频域网络函数为：

$$H(s) = \frac{L \{u_o\}}{L \{u_i\}} = 1 + \frac{1}{s+1} - \frac{4}{s+2} = \frac{s^2}{s^2 + 3s + 2}$$

它的复数形式的网络函数为：

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{-\omega^2}{-\omega^2 + j3\omega + 2}$$

所以当  $u_i = 3\sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t) \text{V}$  时，正弦响应为：

$$\dot{U}_o = H(j\omega) \Big|_{\omega=\sqrt{2}} \times \dot{U}_i = \frac{-(\sqrt{2})^2}{-(\sqrt{2})^2 + j3\sqrt{2} + 2} \times 3 = j\sqrt{2} \text{V}$$

$$\therefore u_o = 2 \cos(\sqrt{2}t + 90^\circ) \text{V}$$

(2) 将已知 $H(j\omega)$ 写成：

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + j5\omega + 6}$$

所以对应的复频域形式的网络函数为：

$$H(s) = H(j\omega)|_{j\omega=s} = \frac{s}{s^2 + 5s + 6}$$

部分分式展开得：

$$H(s) = \frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3}$$

$$\therefore h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = (-2e^{-2t} + 3e^{-3t})s^{-1} \times \varepsilon(t)$$