

第2章 线性直流电路

提要

本章主要包括两部分。首先介绍等效变换方法，包括单回路电路和双节点电路、星形与三角形联接的等效变换、电源的等效变换等；然后介绍电路方程法，它是求解线性直流电路的一般方法，包括支路电流法、回路电流法和节点电压法。

本章目次

1 直流电路模型的背景

2 单回路电路和双节点电路

3 戴维南电路和诺顿电路

4 电阻的星形与三角形联结

5 支路电流法

6 回路电流法

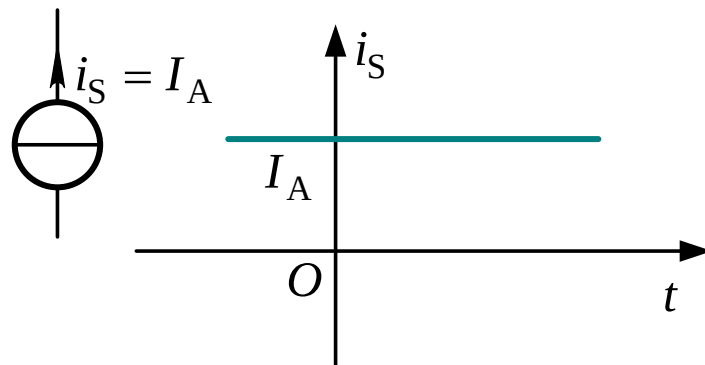
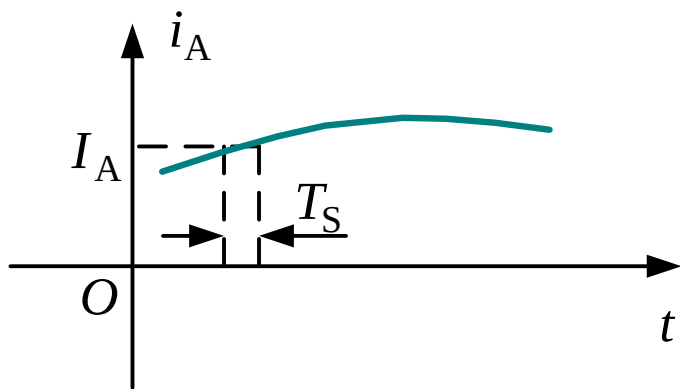
7 节点电压法

直流电路——各处电压和电流在所研究的时间范围内保持恒定的电路。是一种理想化的电路模型。

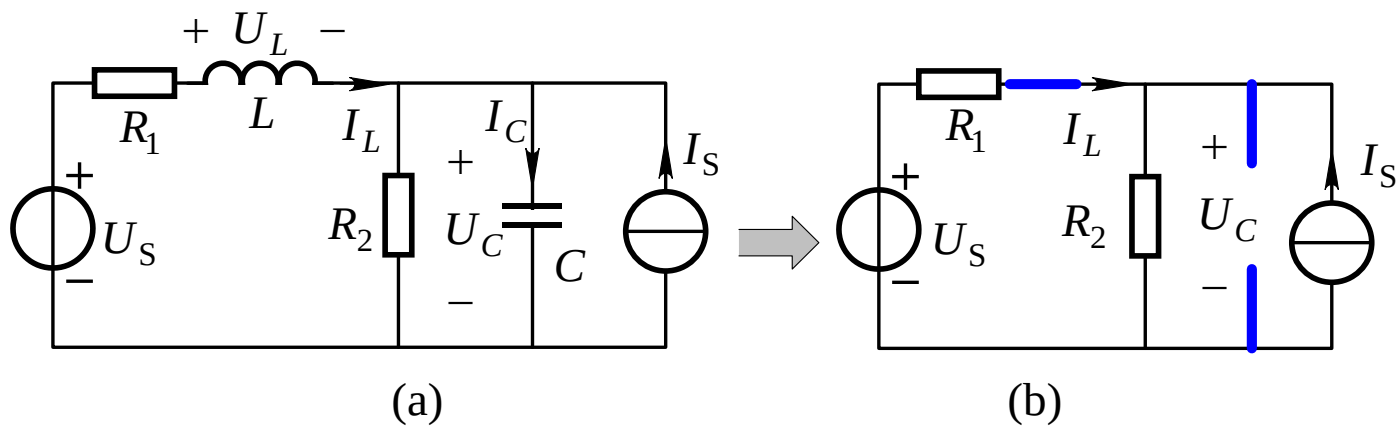
电路中电压和电流的建立过程伴随着电场能量与磁场能量的建立过程。

即便是直流恒压电源（直流恒流电源）供电的电路，在通电后的一段时间内，电压、电流也不是立刻保持恒定，需要一段变化的过程。

自然界中能量的变化总是连续的，不可能立刻完成（电容的电压/电感的电流）变化。



直流电路（模型）——电流、电压恒定，不需要时间变量，没有感生电场和位移电流。



(a) 含电感和电容的线性直流电路； (b) 电感短路、电容开路

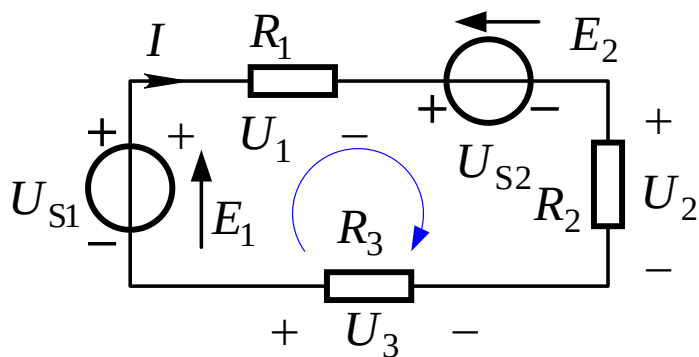
2.2

单回路电路和双节点电路

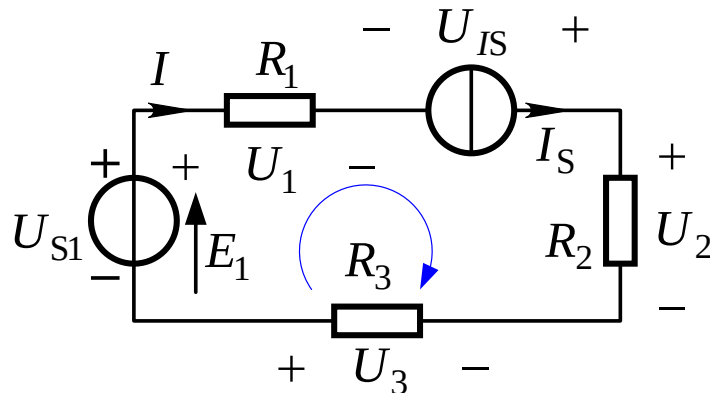
1. 单回路电路：

若干个电阻和电源依次连接（串联）后形成一个回路。

单回路电路中只有一个待求电流。



电压源供电的单回路电路



含电流源的单回路电路

功率守恒：

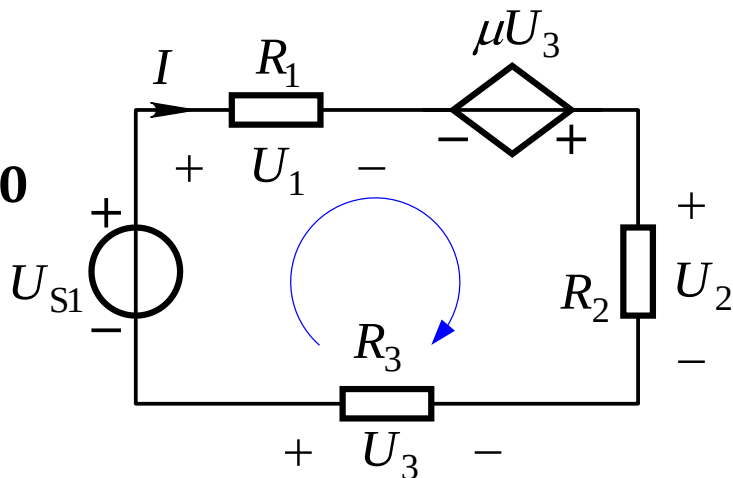
电压源发出功率之和等于电阻消耗功率之和，
功率守恒规律在电路中是普遍正确的。

分析单回路电路的第一步就是确定回路中的电流

含受控源的单回路电路：

KVL方程: $-U_{S1} + U_1 - \mu U_3 + U_2 - U_3 = 0$

$$\begin{aligned} U_{S1} &= IR_1 + \mu IR_3 + IR_2 + IR_3 \\ &= (R_1 + \mu R_3 + R_2 + R_3)I \end{aligned}$$



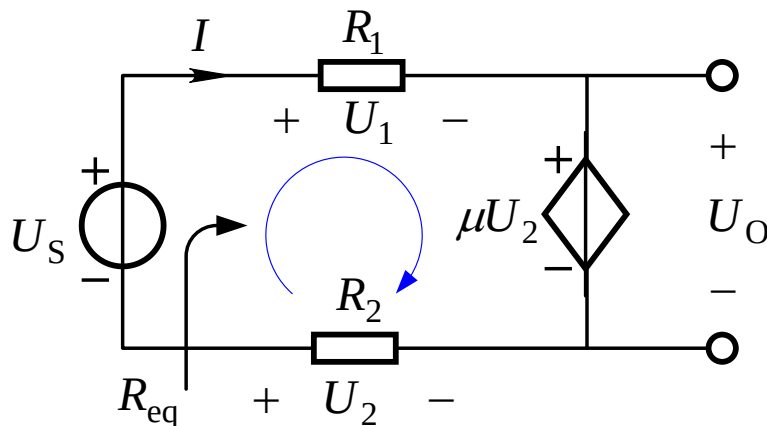
例题 补充

求如图所示电路中的等效电阻 R_{eq} 和输出开路电压 U_0

解

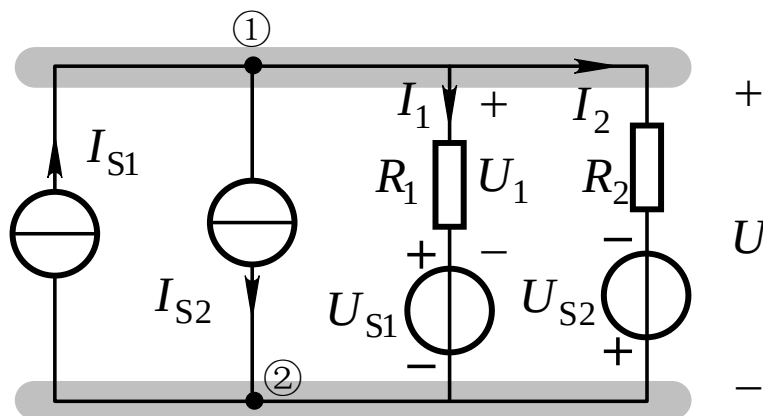
KVL方程: $-U_S + U_1 + \mu U_2 - U_2 = 0$

$$\begin{aligned} R_{eq} &= \frac{U_S}{I} = \frac{IR_1 - \mu IR_2 + IR_2}{I} \\ &= R_1 - \mu R_2 + R_2 \end{aligned}$$



2. 双节点电路:

各支路并联，具有相同的电压，各支路电流都用这个电压来表示，根据节点的KCL方程，可求得电压，从而得到各支路电流。

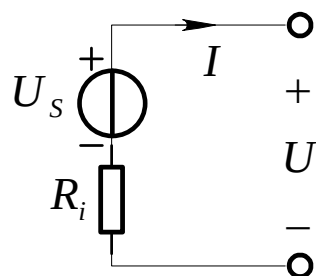


2.3

戴维南电路与诺顿电路

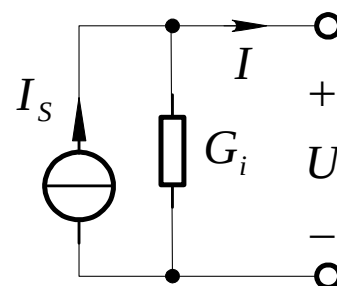
基本要求：掌握各种含源支路的等效化简方法和戴维南、诺顿两种典型电路之间的等效变换规律，能熟练运用这些等效规律化简电路。

1. 戴维南与诺顿电路



(a)
戴维南电路

$$U = U_s - R_i I$$



(b)
诺顿电路

$$I = I_s - G_i U$$

$$I_s = \frac{U_s}{R_i}, \quad G_i = \frac{1}{R_i}$$

注：电压源内阻 $R_i=0$ ，而电流源内导 $G_i=0$ 时（即内阻等于无穷大），它们也称为理想电源。零不能取倒数，故理想电压源和电流源不能相互等效。

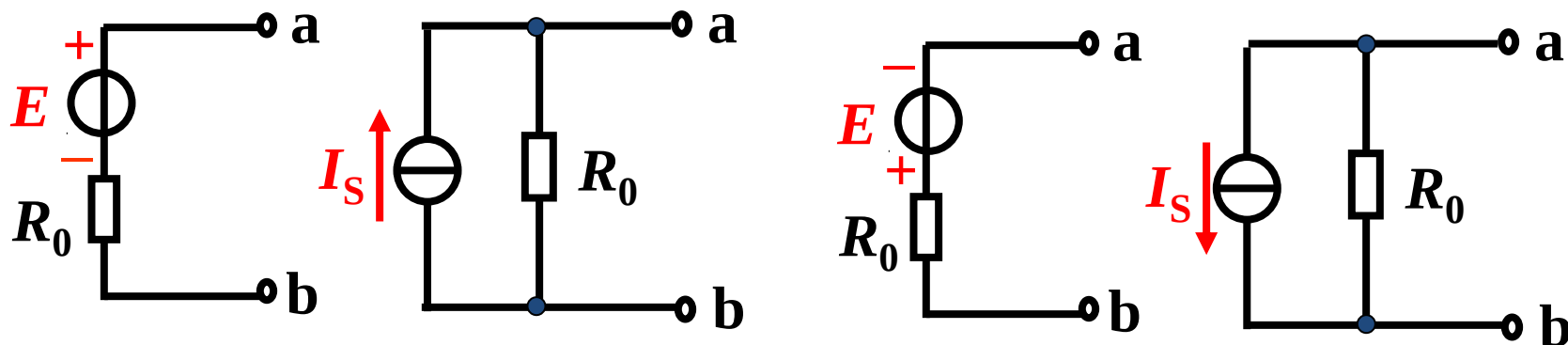
两电源的方向是使它们所产生的开路电压的方向或短路电流的方向是相同的。

注意事项:

- ① 电压源和电流源的等效关系只对外电路而言，对电源内部则是不等效的。

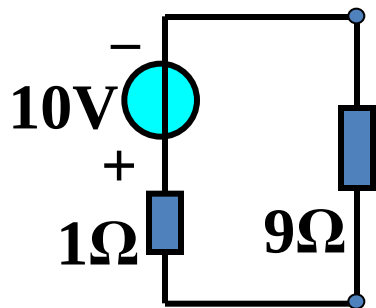
例：当 $R_L = \infty$ 时，电压源的内阻 R_0 中不损耗功率，而电流源的内阻 R_0 中则损耗功率。

- ② 等效变换时，两电源的参考方向要一一对应。



- ③ 理想电压源与理想电流源之间无等效关系。
- ④ 任何一个电压源为 U_s 和某个电阻 R 串联的电路，都可化为一个电流源为 I_s 和这个电阻并联的电路。

1、将图(a)所示电压源，按等效变换法化为电流源



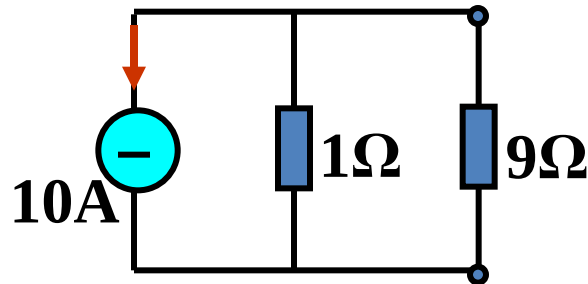
(a)图

解:

$$R_S' = R_S = 1\Omega$$

$$I_S = U/R_S = 10A$$

所以有(b)图所示电流源。



(b)图

2、将(a)(b)图同接9 Ω负载，验证两电源是否等效

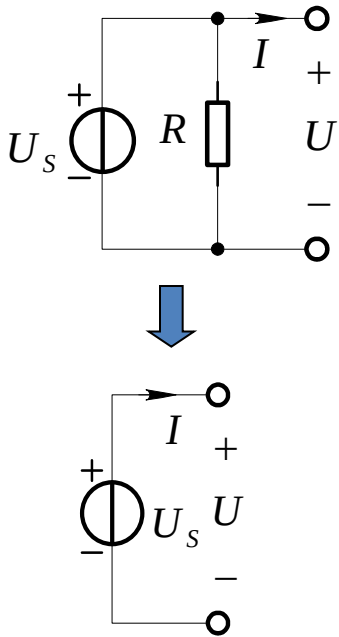
(a)图中 $\begin{cases} U_L = 9V \\ I_L = 1A \end{cases}$

(b)图中 $\begin{cases} I_L = [1/(1+9)] \times 10A = 1A \\ U_L = 1 \times 9 = 9V \end{cases}$

结论：两电源等效变换后对相同的负载是等效的，进一步验证对外等效。

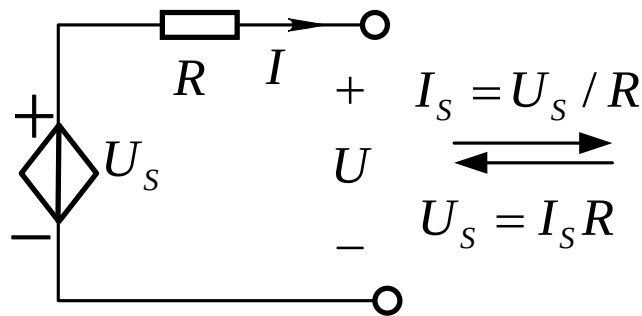
2 其它含源支路的等效

- 电压源并电阻



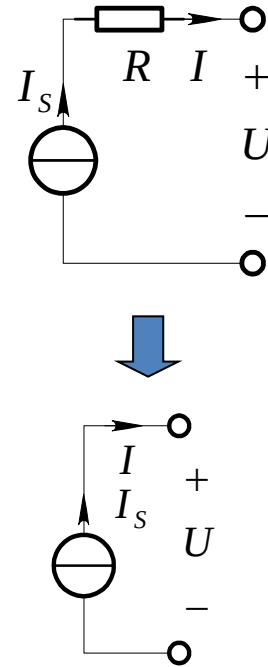
电压源和电阻并联

- 含受控源支路的等效

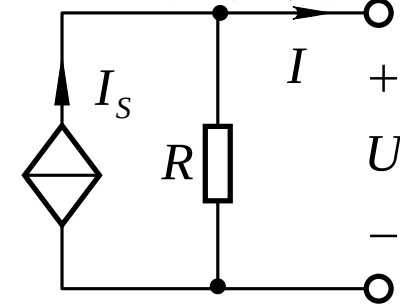


含受控源电路的等效变换

- 电流源串电阻

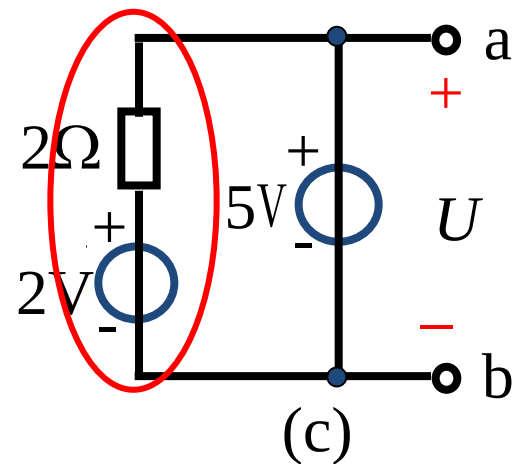
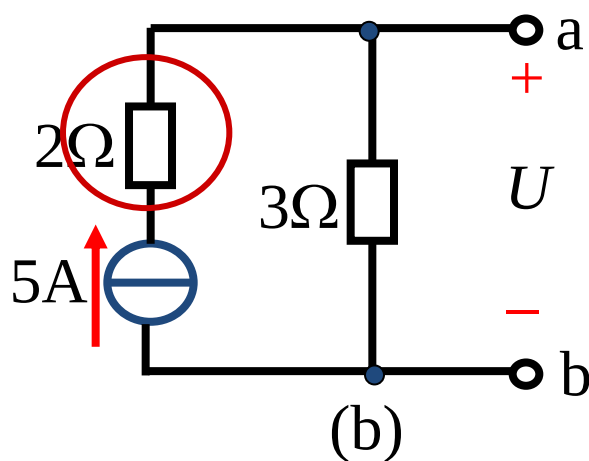
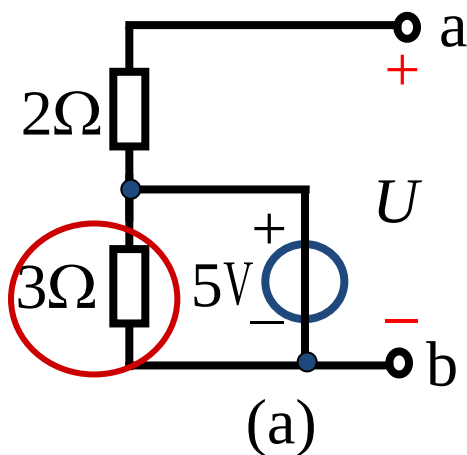


电流源与电阻串联

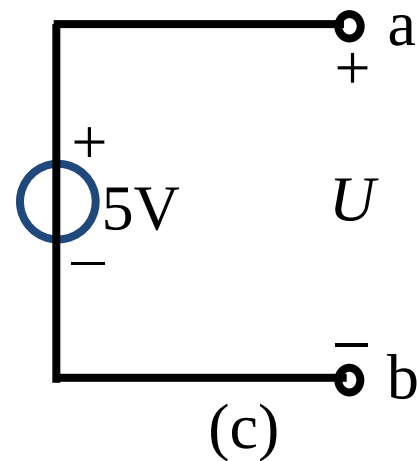
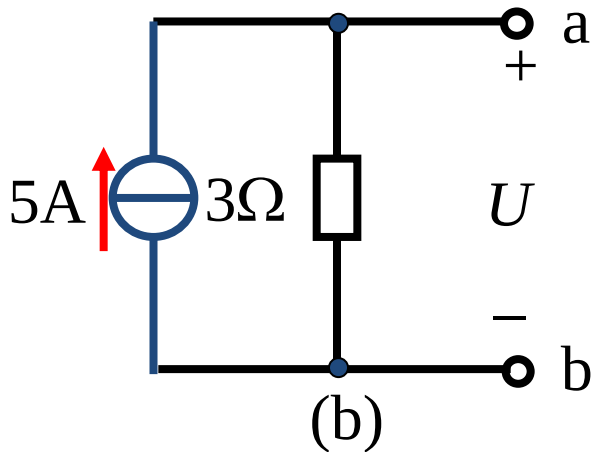
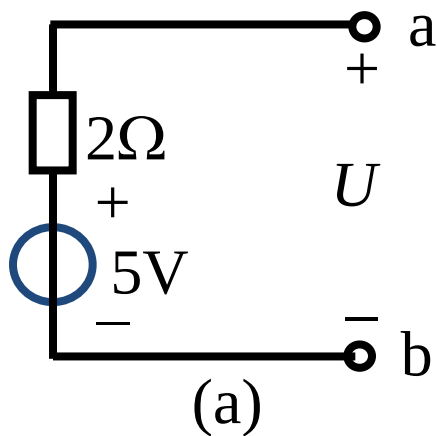


例题 补充

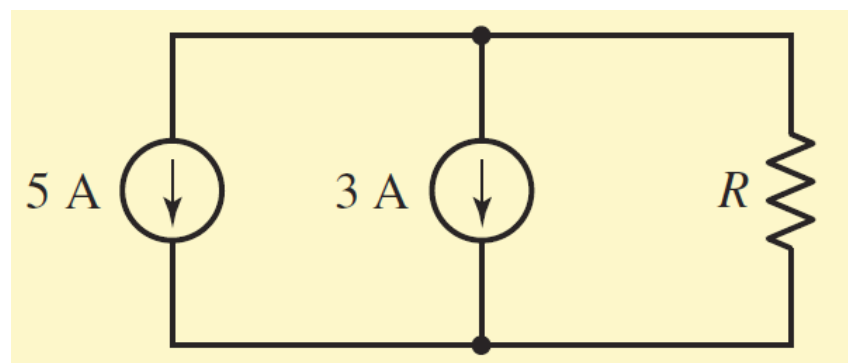
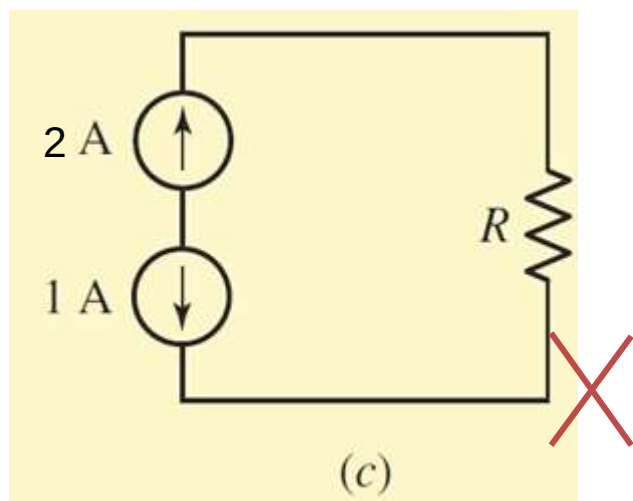
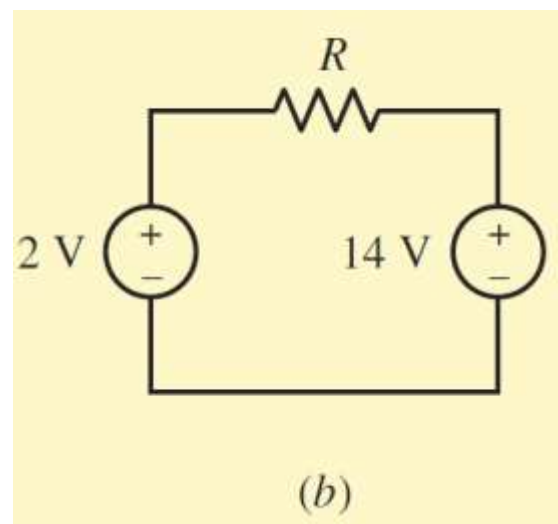
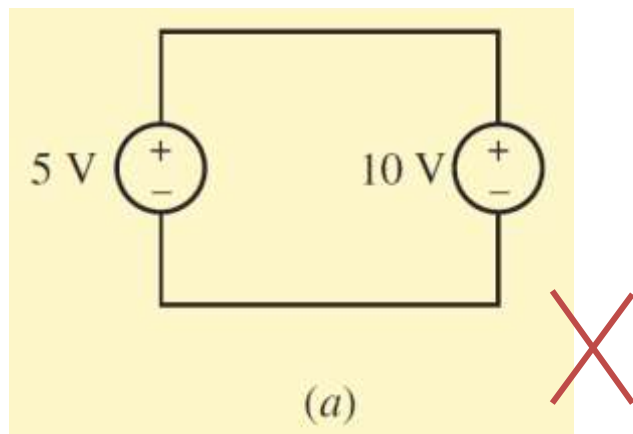
例： 求下列各电路的等效电源



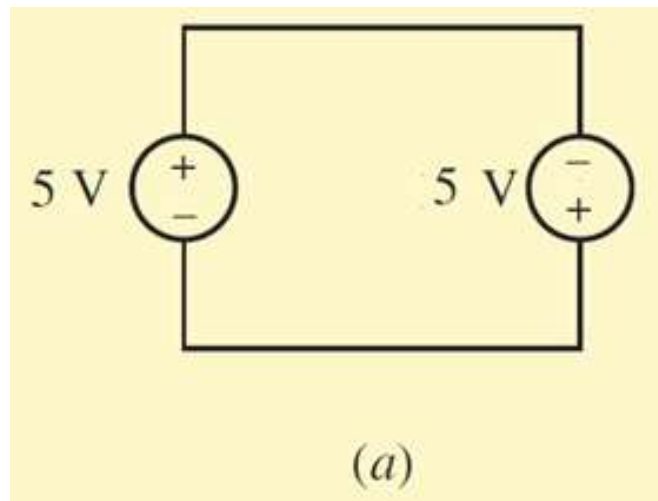
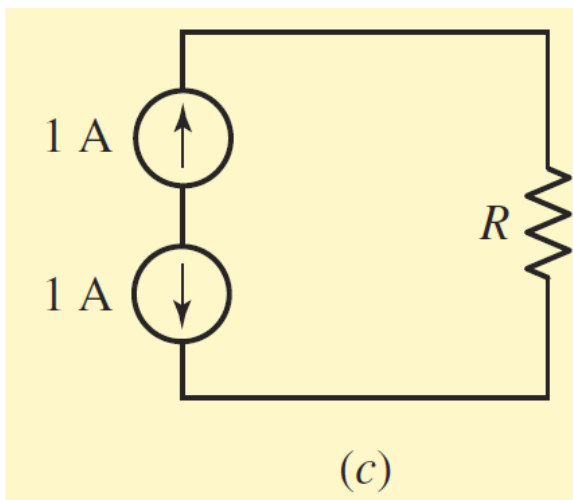
解：



讨论下列电路的有效性:



讨论下列电路的有效性:



结论:

1. 理想电压源不能并联，理想电流源不能串联。
2. 两个电流源完全相同，且同方向串联除外。
3. 两个电压源完全相同，且同方向并联除外。

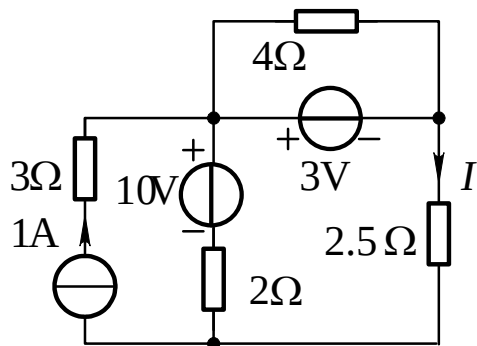
小结

连接情况	等效结果计算公式	说 明
n 个 电压源的 串联	$u_s = \sum_{k=1}^n u_{sk}$	u_s 为等效电压源，当 u_{sk} 与 u_s 的参考方向相同时， u_{sk} 取“+”，反之取“-”
n 个 电流源的 并联	$i_s = \sum_{k=1}^n i_{sk}$	i_s 为等效电流源，当 i_{sk} 与 i_s 的参考方向相同时， i_{sk} 取“+”，反之取“-”
电压源与 非 电压源支路并联	对外电路可以等效为该电压源 u_s	(1)与电压源并联的可以是电阻、电流源，也可以是较复杂的支路。(2)仅是对外电路等效。
电流源与 非 电流源支路串联	对外电路可以等效为该电流源 i_s	(1)与电流源串联的可以是电阻、电压源，也可以是较复杂的支路。(2)仅是对外电路等效。

在电路化简过程中，待求支路必须保留。

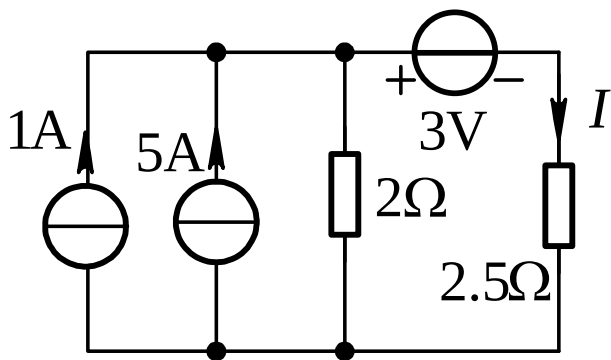
例题 2.1

用等效变换求图示电路中电流 I 。

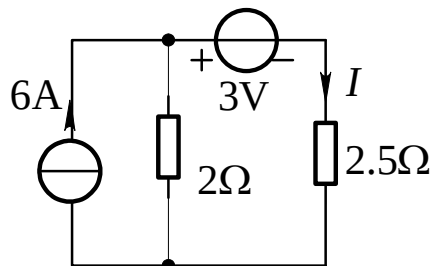


解

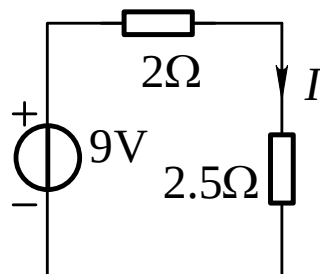
- ① 将电流源与电阻串联电路等效成电流源，将电压源与电阻并联电路等效成电压源；
- ② 将电压源与电阻串联支路等效成电流源与电阻并联支路；



- ③ 将两个并联电流源等效为一个电流源，其源电流等于两个并联电流源源电流的代数和；



- ④ 将电流源与电阻并联电路等效成电压源与电阻串联支路，并将两个串联电压源等效成一个电压源；



$$I = \frac{9V}{2\Omega + 2.5\Omega} = 2A$$

例题 补充

如图所示电路为三个直流稳压电源并联在一起的电路模型，设这三个电源参数不一致：

$$R_1 = 1\Omega, U_{S1} = 12V;$$

$$R_2 = 1.2\Omega, U_{S2} = 11V;$$

$$R_3 = 1.4\Omega, U_{S3} = 10V;$$

a、b处开路。求这三个电源的电流。

解

$$U = U_{S1} - I_1 R_1;$$

$$\text{KCL: } I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$\text{KVL: } U = U_{S2} - I_2 R_2$$

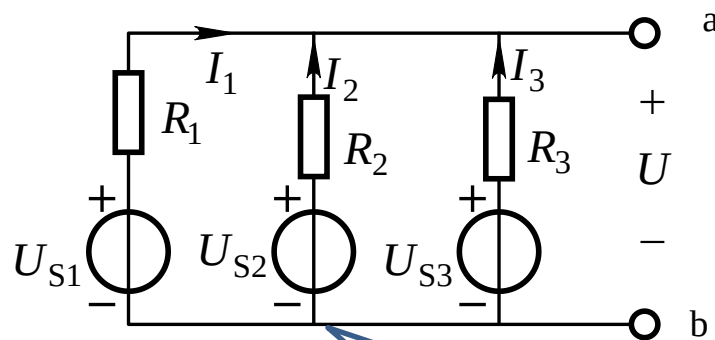
$$U = U_{S3} - I_3 R_3$$

$$U = \frac{U_{S1}/R_1 + U_{S2}/R_2 + U_{S3}/R_3}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3} \approx 11.1121V$$

根据 $U = -R_1 I_1 + U_{S1} = U_{S2} - I_2 R_2 = U_{S3} - I_3 R_3$ ，求得各电源电流

$$I_1 = 0.89A; I_2 = -0.094A; I_3 = -0.0794A$$

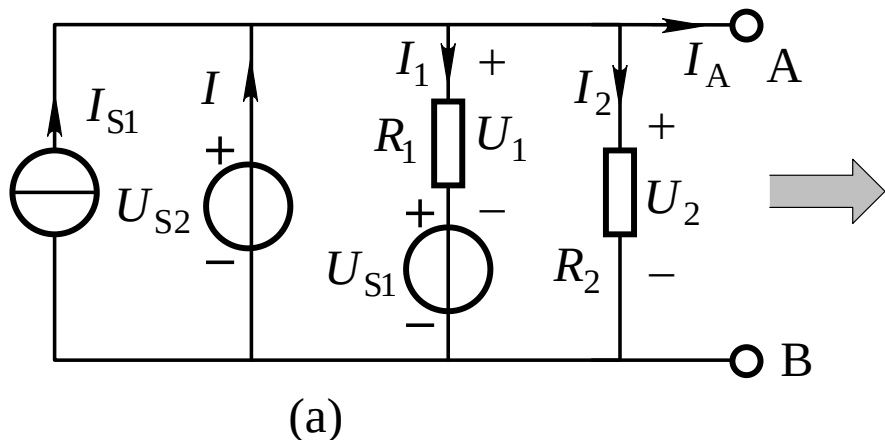
如果稳压电源的参数不一致，并联后，即使没有与负载连接，在各电源内部也存在电流，消耗着电能。所以，若将稳压源并联使用，其参数必须一致。



哪个电源发出能量，
哪个电源吸收能量？

例题 补充

含理想电压源支路的双节点电路及等效电路：



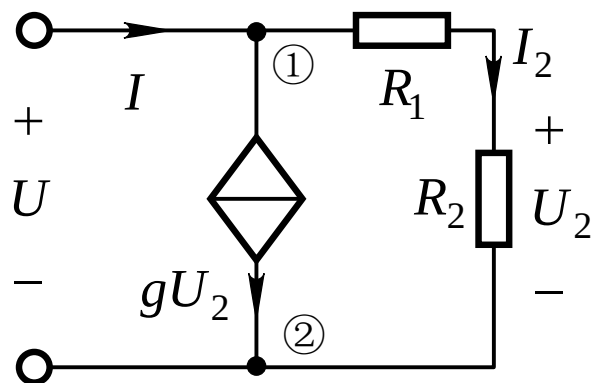
例题 补充

求如图所示电路的电压 U 和电流 I 的关系

$$\text{KCL: } I = gU_2 + I_2 = gI_2R_2 + I_2$$

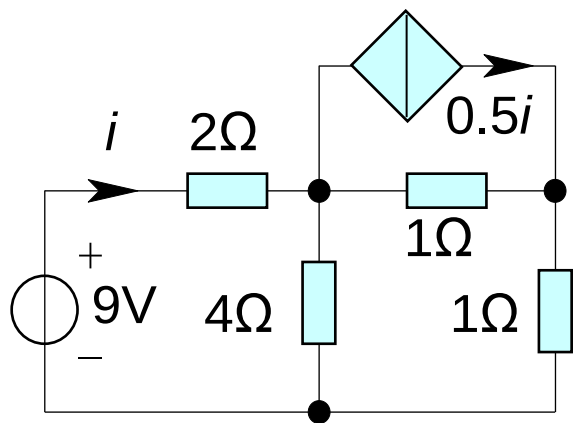
$$\text{KVL: } U = I_2(R_1 + R_2)$$

$$\frac{U}{I} = \frac{R_1 + R_2}{gR_2 + 1}$$

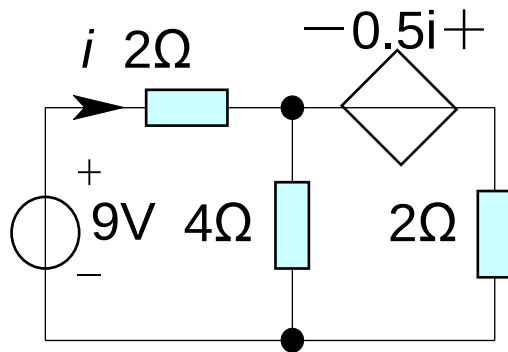


例题 补充

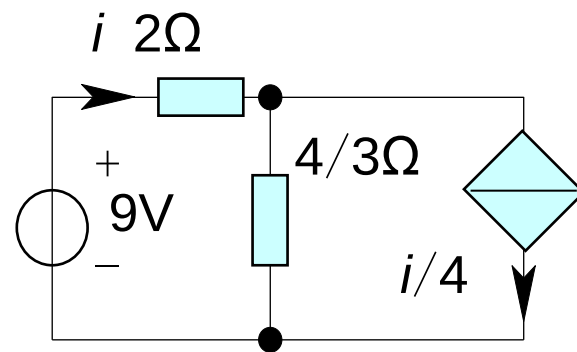
求图A电路的电流*i* .



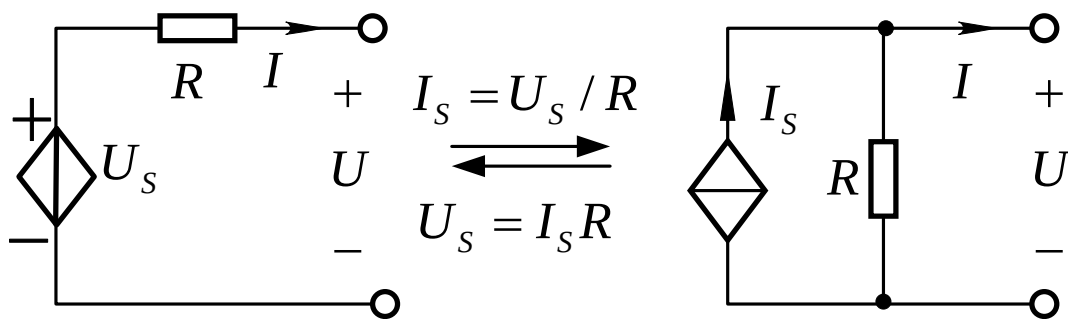
图A



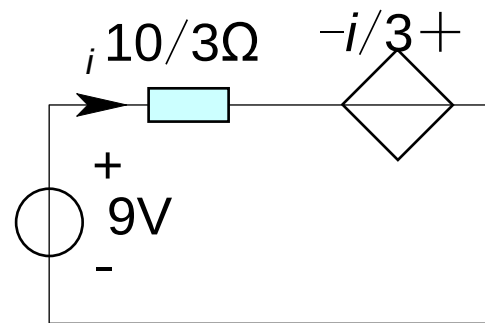
图B



图C



含受控源电路的等效变换



图D

解：利用受控电源等效变换结论，可得图**B**、图**C**与图**D**（即化成关于所求*i*的单回路）：

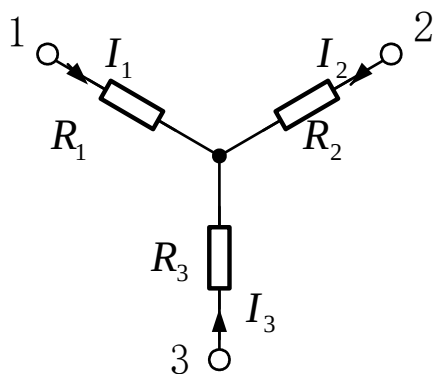
$$\text{由KVL得：} \frac{10i}{3} - \frac{i}{3} = 9 \Rightarrow i = 3 \text{ A}$$

当电路中含有受控源时，由于受控源一方面与电阻不同，不能作串联等效，另一方面又与独立源不同，不是激励。所以仅通过等效变换还得不到最后结果，还必须列写**KCL**、**KVL** 方程以及元件的**VCR**关系式，才能最终解决问题。

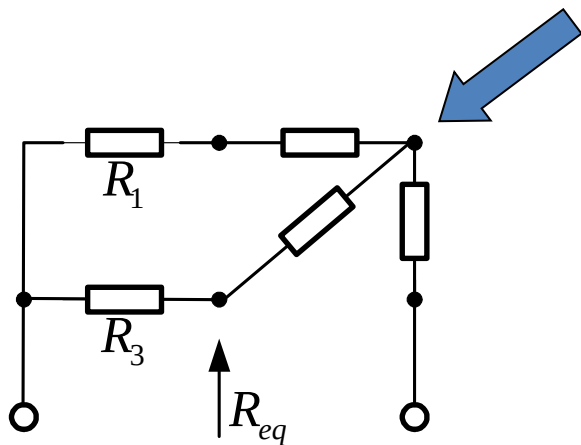
2.4

电阻的星形和三角形联接

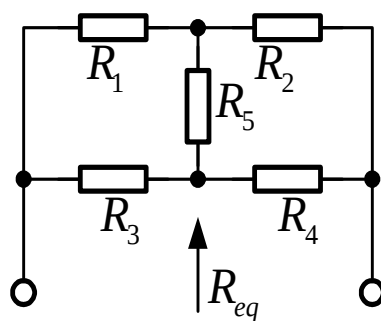
基本要求：掌握电阻的星形和三角形联接的等效原理和等效变换公式，并能应用这些等效变换规律计算电路。



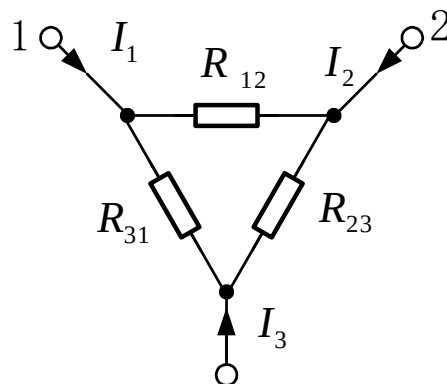
星形(Υ形或T形)联接



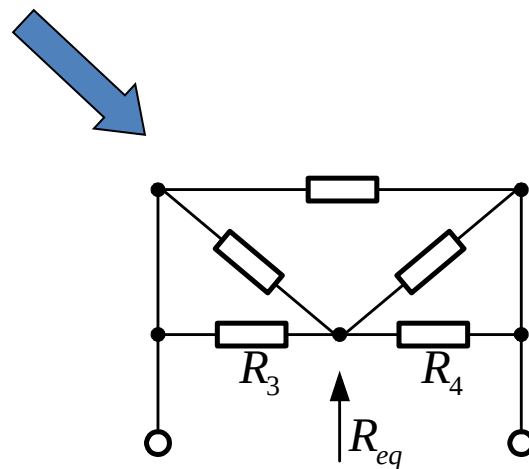
可相互等效，进行
某些电路的化简



电桥电路等效电阻的计算



三角形(Δ形或Π形)联接



三角形和星形之间的等效

星形与三角形联接的网络属于三端网络，有三对端子间电压和三个端子电流，根据KVL和KCL，三端网络的对外作用可以用两对端子间电压和对应的两个端子电流来表示。如果Y形联接的网络和Δ形联接的网络具有相同的电压、电流关系，则这两种网络可以相互替代，而不影响其它部分的电压与电流，此时称Y形网络与Δ形网络相互等效。

•星形连接中的电压、电流关系（描述 I_1 和 I_2 、 U_{13} 和 U_{23} 之间的关系）

$$\begin{cases} U_{13} = R_1 I_1 - R_3 I_3 = R_1 I_1 + R_3 (I_1 + I_2) = (R_1 + R_3) I_1 + R_3 I_2 \\ U_{23} = R_2 I_2 - R_3 I_3 = R_2 I_2 + R_3 (I_1 + I_2) = R_3 I_1 + (R_2 + R_3) I_2 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} U_{13} \\ U_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

•三角形连接中的电压、电流关系（描述 I_1 和 I_2 、 U_{13} 和 U_{23} 之间的关系）

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U_{13}}{R_{31}} + \frac{U_{12}}{R_{12}} = \frac{U_{13}}{R_{31}} + \frac{U_{13} - U_{23}}{R_{12}} = (G_{12} + G_{31}) U_{13} - G_{12} U_{23} \\ I_2 &= \frac{U_{23}}{R_{23}} - \frac{U_{12}}{R_{12}} = \frac{U_{23}}{R_{23}} - \frac{U_{13} - U_{23}}{R_{12}} = -G_{12} U_{13} + (G_{12} + G_{23}) U_{23} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{12} + G_{31} & -G_{12} \\ -G_{12} & G_{12} + G_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{13} \\ U_{23} \end{bmatrix}$$

•由此得二者之间的等效条件是

Y形—Δ形

$$\left. \begin{aligned} R_{12} &= \frac{1}{G_{12}} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_1 G_2} \\ R_{23} &= \frac{1}{G_{23}} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_2 G_3} \\ R_{31} &= \frac{1}{G_{31}} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_3 G_1} \end{aligned} \right\}$$

Δ形—Y形

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{G_{23}}{G_{12} G_{23} + G_{23} G_{31} + G_{31} G_{12}} = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 &= \frac{G_{31}}{G_{12} G_{23} + G_{23} G_{31} + G_{31} G_{12}} = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 &= \frac{G_{12}}{G_{12} G_{23} + G_{23} G_{31} + G_{31} G_{12}} = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{aligned} \right\}$$

注：三个相等的电阻接成Y形或Δ形时的等效变换是：

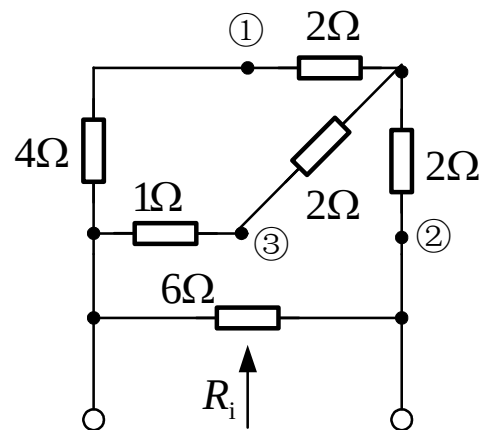
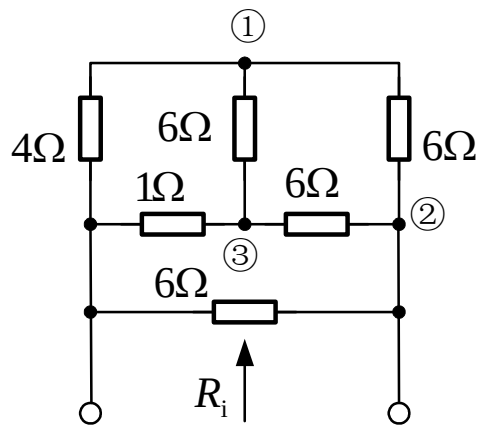
$$R_1 = R_2 = R_3 = R_Y \quad \Rightarrow \quad R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_{\Delta} = 3R_Y \quad \Rightarrow \quad R_Y = \frac{1}{3} R_{\Delta}$$

例题 2.2

求图示电路的等效电阻 R_i

解

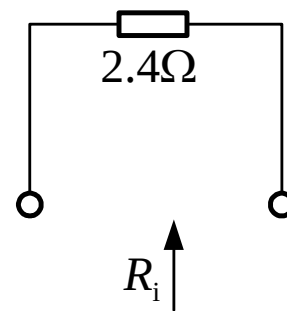
将节点①、②、③之间的对称 Δ 形联接电阻化为等效对称的Y形联接。



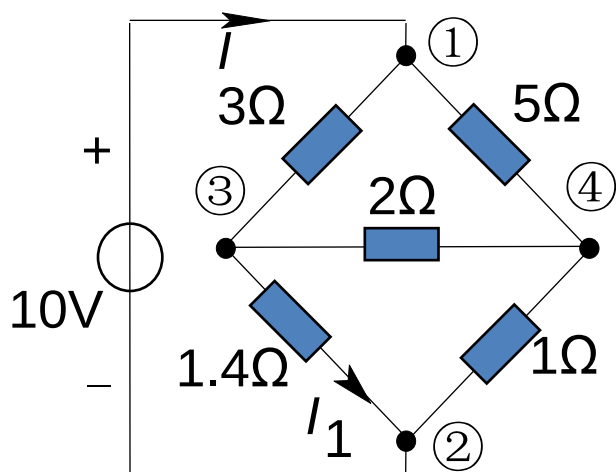
用串并联化简等效后的电路求出等效电阻

$$R_i = 6\Omega \parallel [(4\Omega + 2\Omega) \parallel (1\Omega + 2\Omega) + 2\Omega] = 2.4\Omega$$

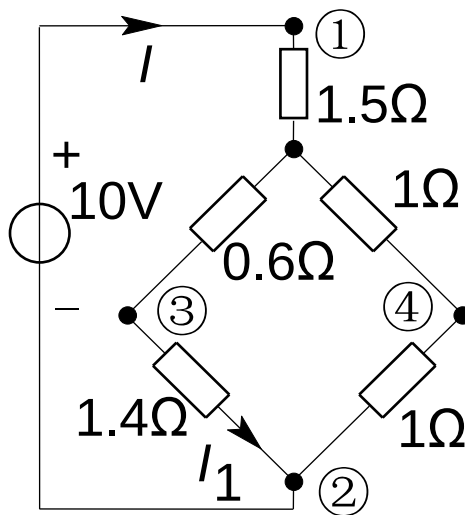
$$R_Y = \frac{1}{3} R_\Delta$$



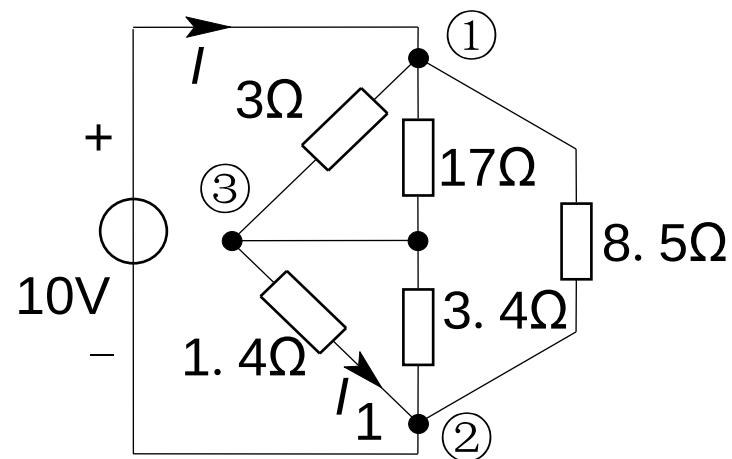
对图A示桥形电路，试求 I 、 I_1



图A



图B



图C

方法1：将上方的 $\triangle \rightarrow Y$ ，得图B

方法2：节点④所接Y电阻 $\rightarrow \triangle$ ，得图C

$$I = 4A, \quad I_1 = 2A$$

小结

电阻的Y ↔ Δ 变换

形 式	Δ → Y	Y → Δ
一般形式	$R_1 = \frac{R_{31} \cdot R_{12}}{R_Z}$ $R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_Z}$ $R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_Z}$ 其中 $R_Z = R_{12} + R_{23} + R_{31}$	$G_{12} = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_Z}$ $G_{23} = \frac{G_2 \cdot G_3}{G_Z}$ $G_{31} = \frac{G_3 \cdot G_1}{G_Z}$ 其中 $G_Z = G_1 + G_2 + G_3$
$R_1 = R_2 = R_3$	$R_Y = \frac{1}{3} R_\Delta$	$R_\Delta = 3R_Y$

2.5

支路电流法

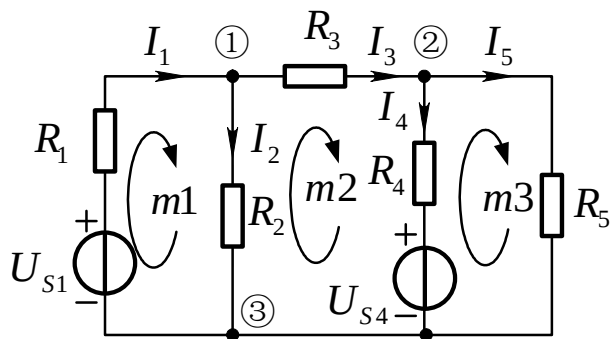
基本要求：熟练掌握支路电流法的原理及方程的列写规则。

设给定的**线性直流电路**具有 **b** 条支路、 **n** 个节点，那么**支路电流法**就是以 **b** 个未知的支路电流作为待求量，对 **$n-1$** 个节点列出独立的**KCL**方程，再对 **$b-(n-1)$** 个回路列出独立的**KVL**方程，这 **b** 个方程联立便可解得 **b** 个支路电流。

注：为列写独立的**KVL**方程，就要选取独立的回路，在平面电路中，对全部内网孔列出的**KVL**方程是一组独立方程。

例题 2.3

列出图示电路的支路电流方程。

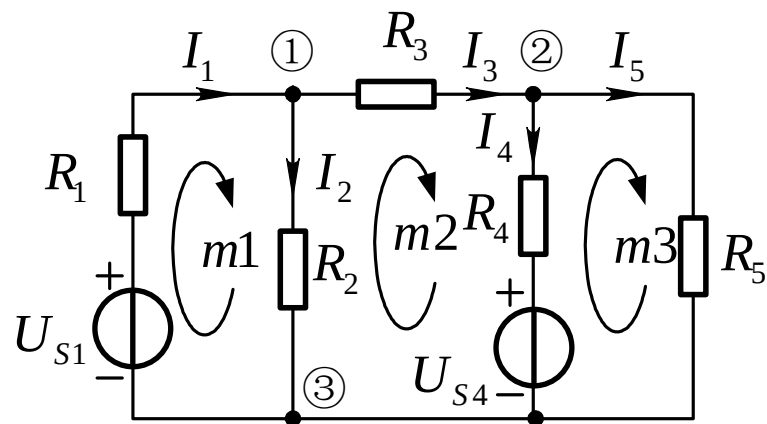


分析：图中 共有5个支路电流，参考方向已标在图中。需列出5个独立方程。现有2个独立节点，对应2个**KCL**方程；3个网孔，对应3个**KVL**方程。

对n-1个节点列KCL方程:

$$\text{节点①: } -I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$\text{节点②: } -I_3 + I_4 + I_5 = 0$$



对网孔列KVL方程, 其中电阻电压用支路电流来表示:

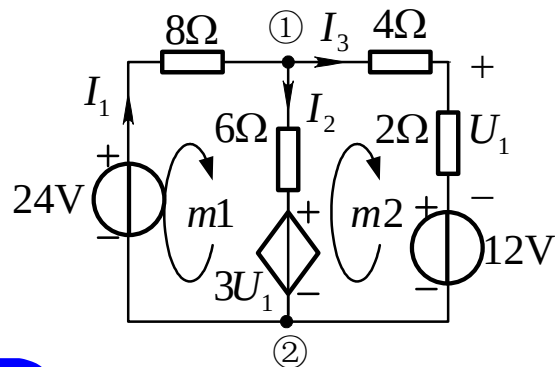
$$\text{网孔}m1: R_1 I_1 + R_2 I_2 = U_{S1}$$

$$\text{网孔}m2: -R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4 = -U_{S4}$$

$$\text{网孔}m3: -R_4 I_4 + R_5 I_5 = U_{S4}$$

例题 2.4

用支路电流法求图中电流 I_1 , I_2 , I_3 。(含受控源)



解

对节点①列KCL方程

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

对网孔列KVL方程

网孔 $m1$: $8\Omega \times I_1 + 6\Omega \times I_2 + 3U_1 = 24V$

网孔 $m2$: $-6\Omega \times I_2 + (4 + 2)\Omega \times I_3 - 3U_1 = -12V$

补充受控源控制量方程, 在支路电流方程中要用支路电流表示控制量。 $U_1 = 2\Omega \times I_3$

解得 $I_1 = \frac{12}{7} A, I_2 = 2A, I_3 = -\frac{2}{7} A$

含受控电源的处理方法:

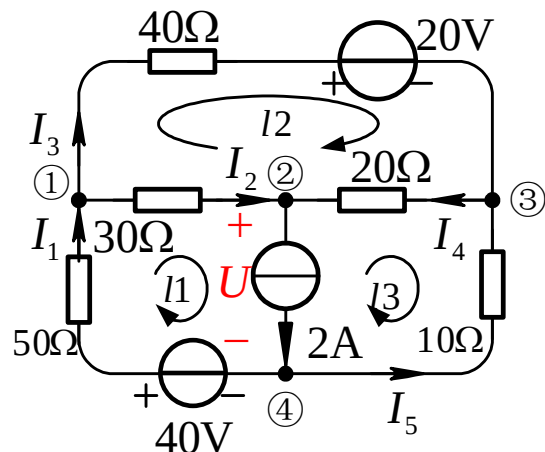
①将受控源看作独立电源, 按上述方法列写支路法方程;

②将控制量用独立变量(支路电流)表示;

③将②的表示式代入①的方程, 移项整理后即得独立变量(支路电流)的方程组。

例题 2.5

列写图示含电流源电路的支路电流方程。



对包含电流源的回路列KVL方程，特别的对未知的电流源的两端电压，要作为变量列入到方程中。

$$\text{网孔} l1: 50\Omega \times I_1 + 30\Omega \times I_2 + U = 40V$$

$$\text{网孔} l2: -30\Omega \times I_2 + 40\Omega \times I_3 + 20\Omega \times I_4 = -20V$$

$$\text{网孔} l3: -20\Omega \times I_4 - 10\Omega \times I_5 - U = 0$$

解

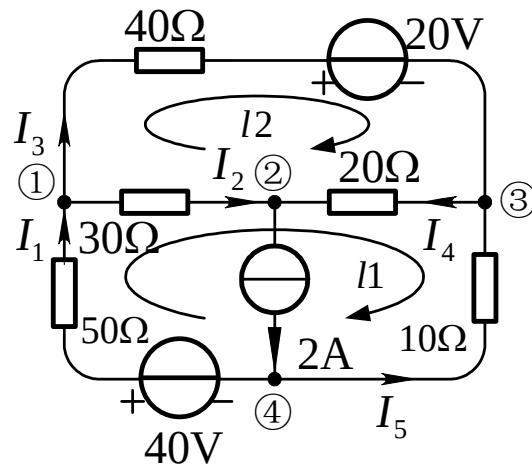
电流源所在支路的电流是已知的，列写KCL方程时，可将其直接列入等号右端。

$$\text{节点} ①: -I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$\text{节点} ②: I_2 + I_4 = 2A$$

$$\text{节点} ③: -I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

讨论：如果不求电流源两端电压，在列方程时能否避开电流源的两端电压？



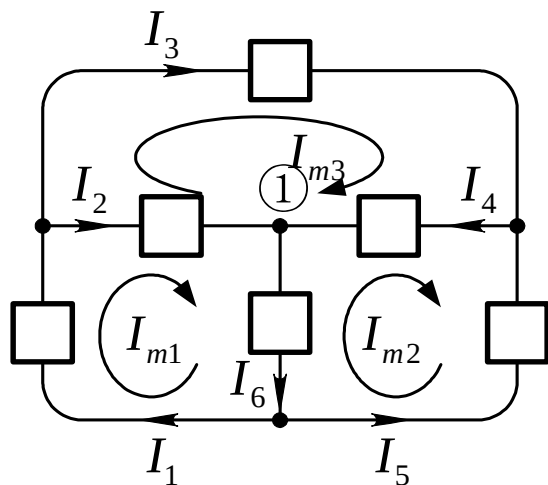
独立方程总数= $(n-1)+(b-n+1)=b$,正好等于独立变量数(支路数),因而所得的线性方程组是可解的。任选 $n-1$ 个节点列写KCL可保证其独立性。因每个网孔不可能由别的网孔来合成得到,所以 $(b-n+1)$ 个网孔可以作为一组独立的回路。选择 $(b-n+1)$ 个独立回路的另一方法是每选一个回路,至少增加一条新的支路。

支路法的基本步骤为

1. 标出各支路电流(参考方向及参数)变量;
2. 标出各节点号,选定 $n-1$ 个,列写KCL方程;
3. 选取 $(b-n+1)$ 个独立回路标出回路绕行方向,列写KVL方程;
4. 联立求解 b 个独立方程,得各支路电流,进而根据各支路的伏安关系解出其它待求量;
5. 对所得的结果进行验算。可选一个未用过的回路,代入数据校验KVL,或用功率守恒进行验算。

基本要求：掌握回路电流的概念、回路电流法的原理和列写规则，并能熟练的应用回路电流法解决电路问题。

1 回路电流



回路电流的概念

1) 概念：假设在每个独立回路中闭合流动的电流（连续的）。

2) 支路电流与回路电流的关系

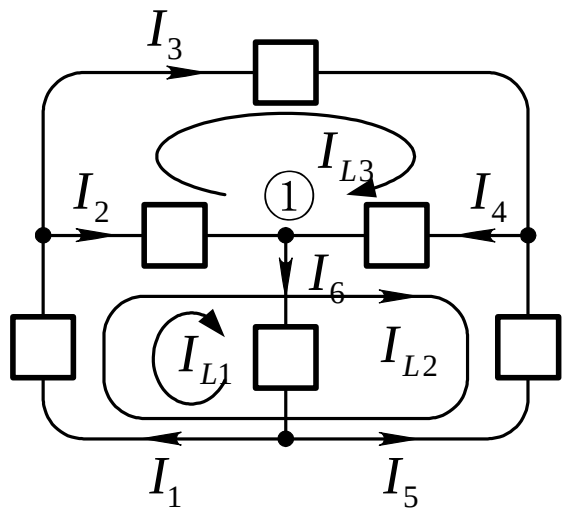
首先看哪条支路是回路所私有的，在数值上可以用支路电流代替回路电流

规定：若支路电流与回路电流方向相同时，回路电流前取正号，否则取负号

$$I_1 = I_{m1}, \quad I_3 = I_{m3}, \quad I_5 = -I_{m2}$$

如果一条支路被包含在多个回路中，则该支路电流等于相应的回路电流的代数和

$$I_2 = I_{m1} - I_{m3}, \quad I_4 = -I_{m2} + I_{m3}, \quad I_6 = I_{m1} - I_{m2}$$



回路电流的概念

$$I_3 = I_{L3}, \quad I_5 = -I_{L2}, \quad I_6 = I_{L1}$$

$$I_1 = I_{L1} + I_{L2}, \quad I_2 = I_{L1} + I_{L2} - I_{L3}, \quad I_4 = -I_{L2} + I_{L3},$$

3) 回路电流的特点

可以证明：以回路电流作为待求量，可以自动地满足KCL方程，下面我们举例说明

节点 ① $-I_2 - I_4 + I_6 = 0$

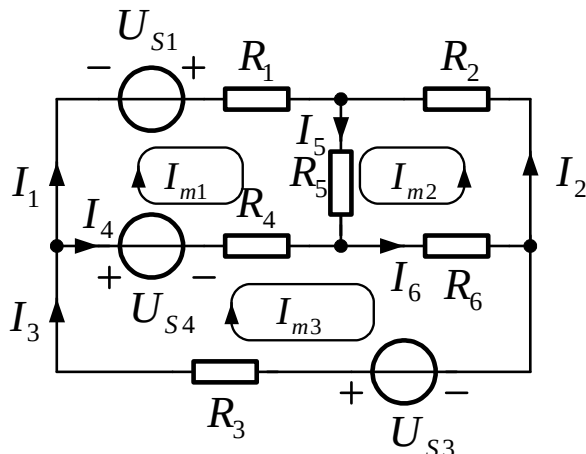
若用回路电流表示支路电流得：

$$-I_{L1} - I_{L2} + I_{L3} + I_{L2} - I_{L3} + I_{L1} = 0 \quad \text{为等于零的恒等式}$$

所以以回路电流作为待求量，无须列写KCL方程

2 回路电流方程的列写

选择 **$b-(n-1)$** 个独立回路（每选一个回路，至少增加一条新的支路），以各回路电流为待求量列写**KVL**方程，这种分析方法称为**回路电流法**或**回路分析法**。
以回路电流为变量求解比支路法求解的方程数少（ $n-1$ ）即只有 **$(b-n+1)$** 个



回路法示例

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{m1}, & I_2 &= I_{m2}, & I_3 &= I_{m3} \\ I_4 &= -I_{m1} + I_{m3}, & I_5 &= I_{m1} + I_{m2}, & I_6 &= I_{m2} + I_{m3} \end{aligned}$$

用回路电流代替支路电流，列写KVL方程：

回路1: $R_1 I_{m1} + R_5 (I_{m1} + I_{m2}) - R_4 (-I_{m1} + I_{m3}) = U_{S1} + U_{S4}$

回路2: $R_2 I_{m2} + R_5 (I_{m1} + I_{m2}) + R_6 (I_{m2} + I_{m3}) = 0$

回路3: $R_4 (-I_{m1} + I_{m3}) + R_6 (I_{m2} + I_{m3}) + R_3 I_{m3} = U_{S3} - U_{S4}$

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + R_4 + R_5) I_{m1} + R_5 I_{m2} - R_4 I_{m3} &= U_{S1} + U_{S4} \\ R_5 I_{m1} + (R_2 + R_5 + R_6) I_{m2} + R_6 I_{m3} &= 0 \\ -R_4 I_{m1} + R_6 I_{m2} + (R_3 + R_4 + R_6) I_{m3} &= U_{S3} - U_{S4} \end{aligned} \right\}$$

$\Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} R_{11} I_{m1} + R_{12} I_{m2} + R_{13} I_{m3} &= \sum_{\text{网孔1}} U_S \\ R_{21} I_{m1} + R_{22} I_{m2} + R_{23} I_{m3} &= \sum_{\text{网孔2}} U_S \\ R_{31} I_{m1} + R_{32} I_{m2} + R_{33} I_{m3} &= \sum_{\text{网孔3}} U_S \end{aligned} \right\}$$

列写回路电流方程的一般规则

$$1 \quad R_{11} = R_1 + R_4 + R_5, \quad R_{22} = R_2 + R_5 + R_6, \quad R_{33} = R_3 + R_4 + R_6$$

分别是组成回路1、2、3的各支路上电阻之和，称为**回路的自阻**。

$$2 \quad R_{12} = R_{21} = R_5, \quad R_{13} = R_{31} = -R_4, \quad R_{23} = R_{32} = R_6$$

分别对应两个网孔间公共支路上的电阻，称为**相邻两网孔之间的互阻**。
如果这两个网孔电流在此公共支路上的方向相同，互阻为正；否则为负。

注：在只含独立电源和电阻的电路中，互阻 $R_{ij} = R_{ji}$ 即回路电阻矩阵对称

$$3 \quad \sum_{\text{回路1}} U_S = U_{S1} + U_{S4}, \quad \sum_{\text{回路2}} U_S = 0, \quad \sum_{\text{回路3}} U_S = U_{S3} - U_{S4}$$

分别为沿回路1、2、3电压源电位升的代数和，沿回路电位升取正号，沿回路电位降取负号。

一般形式：

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{m1} & R_{m2} & \cdots & R_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ \vdots \\ I_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\text{回路1}} U_S \\ \sum_{\text{回路2}} U_S \\ \vdots \\ \sum_{\text{回路m}} U_S \end{bmatrix}$$

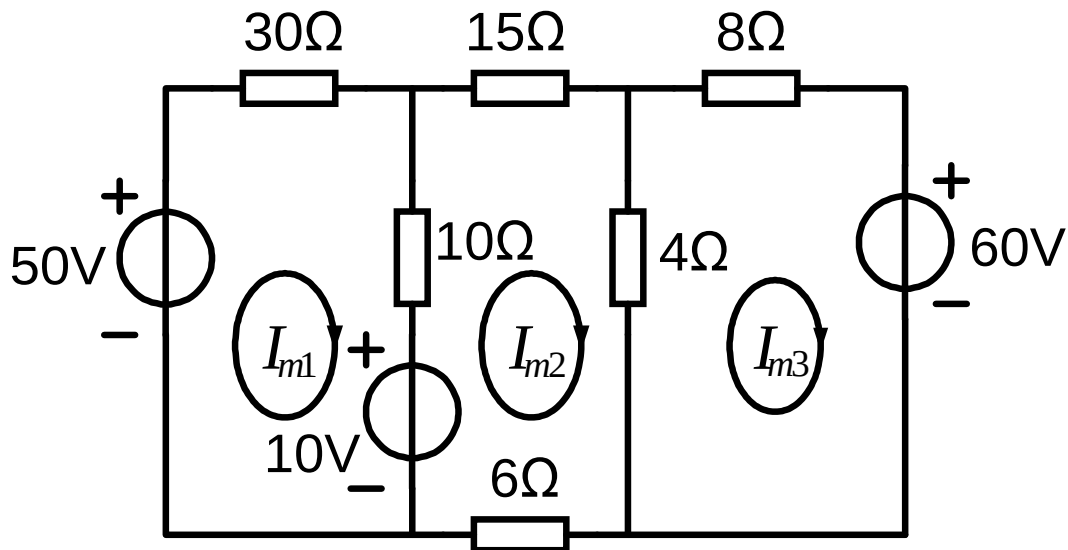
回路电阻矩阵

回路电流向量

回路源电压向量

例题 2.6

列图示电路的回路电流方程。



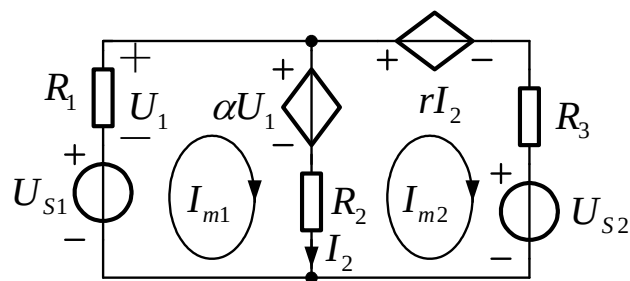
$$(30\Omega + 10\Omega)I_{m1} - 10\Omega I_{m2} = 50V - 10V$$

$$-10\Omega I_{m1} + (10\Omega + 15\Omega + 4\Omega + 6\Omega)I_{m2} - 4\Omega I_{m3} = 10V$$

$$-4\Omega I_{m2} + (4\Omega + 8\Omega)I_{m3} = -60V$$

例题 2.7

含受控源电路如图所示。试列出回路电流方程。



对方程进行整理：

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + R_2 - \alpha R_1)I_{m1} - R_2 I_{m2} &= U_{S1} \\ (-R_2 + \alpha R_1 + r)I_{m1} + (R_2 + R_3 - r)I_{m2} &= -U_{S2} \end{aligned} \right\}$$

解

选网孔为独立回路，如图所示，列方程：

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2)I_{m1} - R_2 I_{m2} &= U_{S1} - \alpha U_1 \\ -R_2 I_{m1} + (R_2 + R_3)I_{m2} &= -U_{S2} + \alpha U_1 - rI_2 \end{aligned}$$

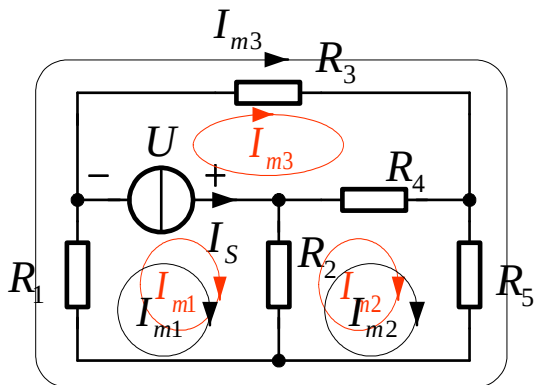
电路中含有受控源，而控制量在回路方程中通常体现为未知量，所以在回路电流法中，用回路电流表示各受控源的控制量：

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= -R_1 I_{m1} \\ I_2 &= I_{m1} - I_{m2} \end{aligned} \right\}$$

注：本例主要说明当电路中含有受控源时，回路电流方程的列写规则。另外当电路中含受控源时，回路方程中的互阻一般不再相等。

例题 2.8

列出图示含有电流源电路的回路电流方程。



能否利用电流源电流这个已知条件来减少方程数？

适当选取独立回路使电流源只流过一个回路电流

这样该回路电流 I_{m1} 便等于电流源 I_s 。因此减少一个待求的回路电流。

$$I_{m1} = I_s$$

$$(R_1 + R_2)I_s - R_2I_{m2} + R_1I_{m3} - U = 0$$

$$-R_2I_s + (R_2 + R_4 + R_5)I_{m2} + R_5I_{m3} = 0$$

$$R_1I_s + R_5I_{m2} + (R_1 + R_3 + R_5)I_{m3} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + R_2)I_{m1} - R_2I_{m2} &= U \\ -R_2I_{m1} + (R_2 + R_4 + R_5)I_{m2} - R_4I_{m3} &= 0 \\ -R_4I_{m2} + (R_3 + R_4)I_{m3} &= -U \end{aligned} \right\}$$

注：在对含电流源的电路列回路电流方程时，应适当选取回路，使电流源中只流过一个回路电流，从而减少待求量个数。

此时，除回路电流外，还多出电流源两端电压这个未知量，所以补充电流源支路的特性方程

$$I_{m1} - I_{m3} = I_s$$

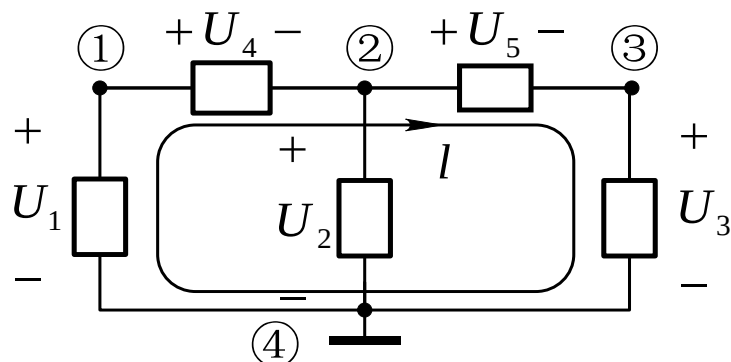
改进回路电流法

回路电流法的基本步骤

- 1、选定 ($b-n+1$ 个)独立回路，标出回路电流及绕行方向(常选网孔)；
- 2、运用“自电阻,互电阻及回路电压源的电位升代数和”概念直接列写回路电流方程；
- 3、联立求解这 m 个独立方程，得各回路电流，进而解出其它待求量；

基本要求：透彻理解节点电压的概念、熟练掌握节点电压法的原理和方程的列写规则。

节点电压：任选一点作为参考点，其它各点与参考点之间的电压称为该点的节点电压或节点电位。**节点电压的参考极性均以参考节点为负极性端，以所对应的节点为正极性端。**



节点电压举例

①, ②, ③的节点电压用 U_{n1}, U_{n2}, U_{n3}

1) 节点电压具有**单值性**，与路径无关

2) **完备性**：任意两点之间的电压可表达成这两个节点电压之差。

$$U_4 = U_1 - U_2 = U_{n1} - U_{n2}$$

$$U_5 = U_2 - U_3 = U_{n2} - U_{n3}$$

3) **独立性**：节点电压自动满足KVL方程，即当用节点电压表示支路电压时，支路电压一定满足KVL方程。

$$-U_1 + U_4 + U_5 + U_3 = 0$$

$$-U_{n1} + (U_{n1} - U_{n2}) + (U_{n2} - U_{n3}) + U_{n3} = 0$$

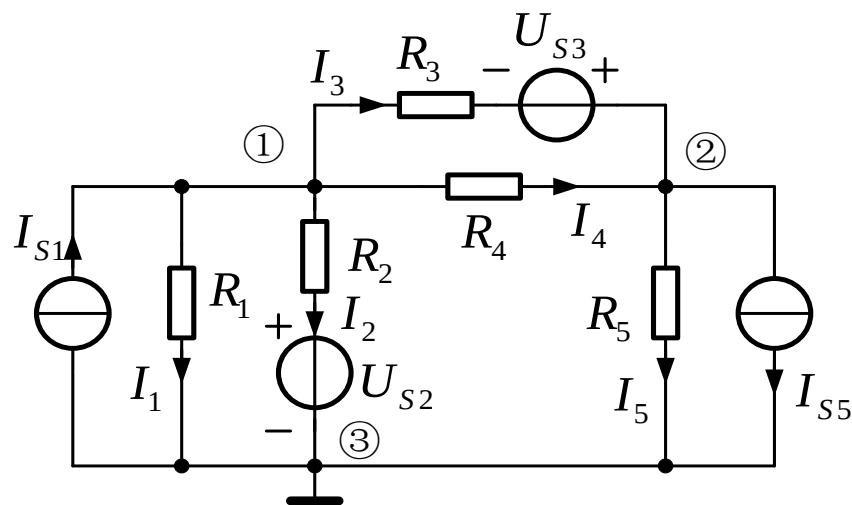
节点电压法：以n-1个节点电压为待求量，对n-1个节点列写KCL方程的方法。

节点电压方程的列写规则：

1、选取参考节点，对其他剩余节点列写KCL方程

以节点③为参考点，节点①、②的KCL方程为

$$\left. \begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 + I_4 &= I_{S1} \\ -I_3 - I_4 + I_5 &= -I_{S5} \end{aligned} \right\}$$



节点电压法示例

2 用节点电压表示各个支路电流

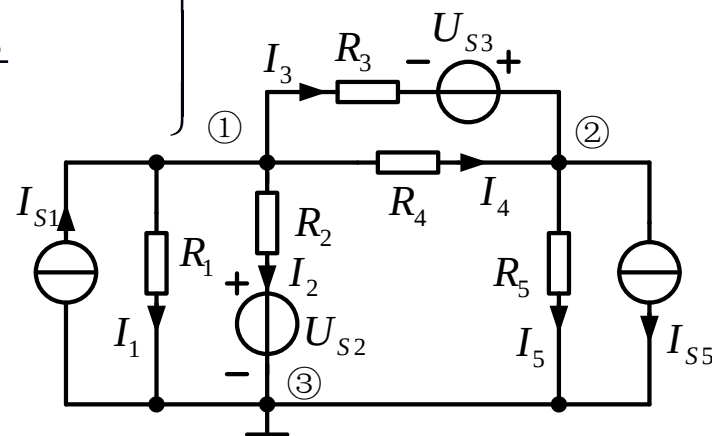
$$\begin{aligned} \frac{U_{n1}}{R_1} + \frac{U_{n1} - U_{S2}}{R_2} + \frac{U_{n1} - U_{n2} + U_{S3}}{R_3} + \frac{U_{n1} - U_{n2}}{R_4} &= I_{S1} \\ -\frac{U_{n1} - U_{n2} + U_{S3}}{R_3} - \frac{U_{n1} - U_{n2}}{R_4} + \frac{U_{n2}}{R_5} &= -I_{S5} \end{aligned}$$

进行整理

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_{n1} - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_{n2} &= I_{S1} + \frac{U_{S2}}{R_2} - \frac{U_{S3}}{R_3} \\ -\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_{n1} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)U_{n2} &= -I_{S5} + \frac{U_{S3}}{R_3} \end{aligned} \right\}$$

3 标准形式

$$\left. \begin{aligned} G_{11}U_{n1} + G_{12}U_{n2} &= \sum_{\text{节点1}} I_{Sk} + \sum_{\text{节点1}} G_k U_{Sk} \\ G_{21}U_{n1} + G_{22}U_{n2} &= \sum_{\text{节点2}} I_{Sk} + \sum_{\text{节点2}} G_k U_{Sk} \end{aligned} \right\}$$



节点电压法示例

推广之：

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1(n-1)} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{(n-1)1} & G_{(n-1)2} & \cdots & G_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ \vdots \\ U_{n(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1 I_S + \sum_1 G U_S \\ \sum_2 I_S + \sum_2 G U_S \\ \vdots \\ \sum_{n-1} I_S + \sum_{n-1} G U_S \end{bmatrix}$$

节点电导矩阵

节点电
压向量

节点源电
流向量

规则小结:

$$1 \quad G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}, G_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

分别是与节点①、②直接相连的各支路电导之和, 称为节点①、②的**自导**。

$$2 \quad G_{12} = -(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}), G_{21} = -(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4})$$

是直接联接在节点①、②之间的诸支路电导之和并带一负号, 称为节点①、②间的**互导**。

$$3 \quad \sum_{\text{节点1}} I_{Sk}, \sum_{\text{节点2}} I_{Sk}$$

表示与节点①、②相连的**电流源电流代数和**, 当电流流入节点时取“+”号; 否则取“-”号; <注意符号>

$$4 \quad \sum_{\text{节点1}} G_k U_{Sk}, \sum_{\text{节点2}} G_k U_{Sk}$$

分别是与节点①、②相连的电压源与串联电导乘积的代数和, 当电压源正极性端指向节点时, 取“+”号; 否则取“-”号。

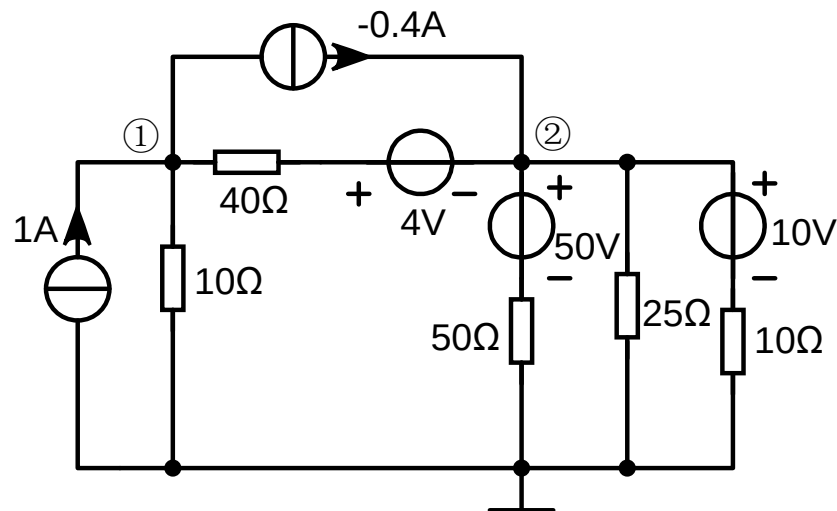
3、4分别称为节点①、②的注入电流或节点源电流。

5 在仅由独立源和两端电阻组成的电路中, 其节点电导矩阵具有对称性, 即 $G_{ij} = G_{ji}$

求图示电路的节点电压法

[解]

选定参考点，给其余节点编号，按一般规则列节点电压法方程



$$\left(\frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{40\Omega}\right)U_{n1} - \frac{1}{40\Omega}U_{n2} = 1A + 0.4A + \frac{4V}{40\Omega}$$

$$-\frac{1}{40\Omega}U_{n1} + \left(\frac{1}{40\Omega} + \frac{1}{50\Omega} + \frac{1}{25\Omega} + \frac{1}{10\Omega}\right)U_{n2} = -0.4A - \frac{4V}{40\Omega} + \frac{50V}{50\Omega} + \frac{10V}{10\Omega}$$

$$\begin{cases} 0.125S \times U_{n1} - 0.025S \times U_{n2} = 1.5A \\ -0.025S \times U_{n1} + 0.185S \times U_{n2} = 1.5A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{n1} = 14V \\ U_{n2} = 10V \end{cases}$$

例题 2.9

列出图示电路的节点电压方程。

解

分析：此电路特殊之处在于含受控源，列节点电压方程时，仍将受控源按独立源处理。

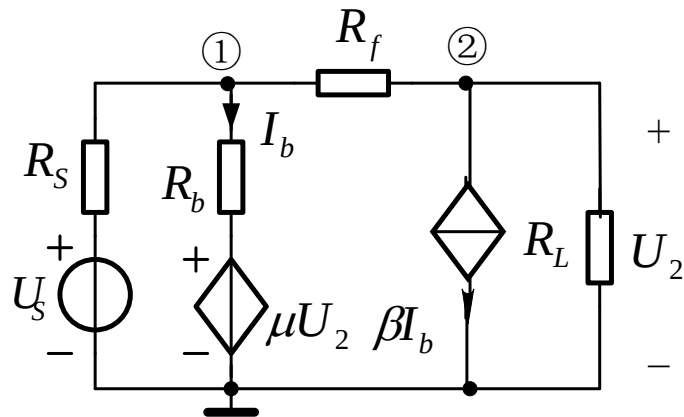
1 对节点①、②列出节点电压方程

$$\left(\frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_f}\right)U_{n1} - \frac{1}{R_f}U_{n2} = \frac{U_S}{R_S} + \frac{\mu U_2}{R_b}$$

$$-\frac{1}{R_f}U_{n1} + \left(\frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_L}\right)U_{n2} = -\beta I_b$$

2 把受控电源的控制量用节点电压来表示

$$U_2 = U_{n2}, \quad I_b = \frac{U_{n1} - \mu U_2}{R_b}$$



3 对方程进行整理：

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_f}\right)U_{n1} - \left(\frac{1}{R_f} + \frac{\mu}{R_b}\right)U_{n2} &= \frac{U_S}{R_S} \\ -\left(\frac{1}{R_f} + \frac{\beta}{R_b}\right)U_{n1} + \left(\frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_L} - \frac{\beta\mu}{R_L}\right)U_{n2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

注：受控源要影响节点电压方程的系数，一般不再具有对称性。

例题 补充

求节点电压及电流源发出的功率

【解】 $I_1 + I_2 = 1A$

$$\frac{U_{n1}}{10\Omega} + \frac{U_{n1} - U_{n2} - 20V}{40\Omega} = 1A$$

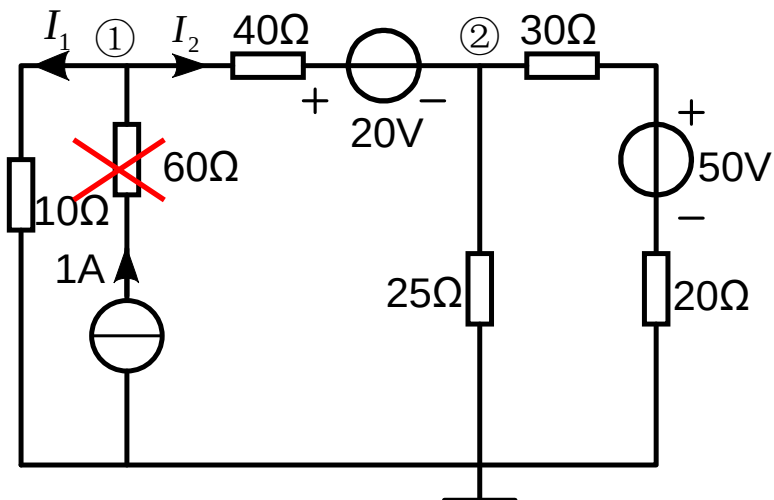
$$\left(\frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{40\Omega}\right)U_{n1} - \frac{1}{40\Omega}U_{n2} = 1A + \frac{20V}{40\Omega}$$

$$\left(\frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{40\Omega} + \frac{1}{60\Omega}\right)U_{n1} - \frac{1}{40\Omega}U_{n2} = 1A + \frac{20V}{40\Omega}$$

$$-\frac{1}{40\Omega}U_{n1} + \left(\frac{1}{40\Omega} + \frac{1}{25\Omega} + \frac{1}{50\Omega}\right)U_{n2} = \frac{50V}{50\Omega} - \frac{20V}{40\Omega}$$

$$\begin{cases} 0.125S \times U_{n1} - 0.025S \times U_{n2} = 1.5A \\ -0.025S \times U_{n1} + 0.085S \times U_{n2} = 0.5A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{n1} = 14V \\ U_{n2} = 10V \end{cases}$$

$$U = U_{n1} + 20\Omega \times 1A = 14V + 20V = 34V \Rightarrow P = U \times 1A = 34W$$



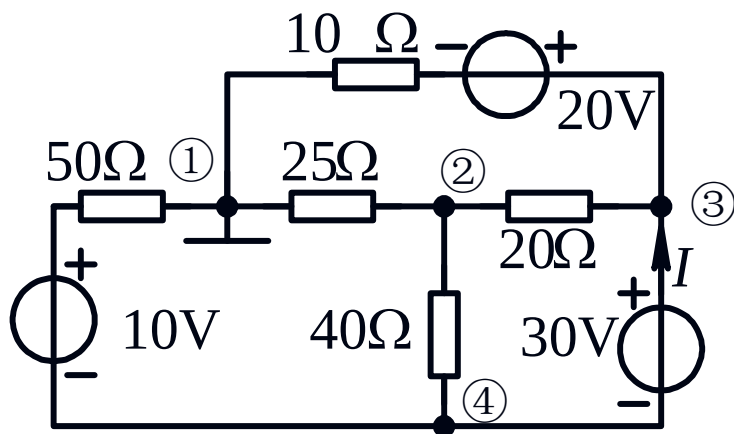
例题

2.10

列出图示电路对应不同参考点的节点电压方程，并计算 25Ω 电阻消耗的功率。

解

分析：图中存在一个仅含电压源的支路，即纯电压源支路。该支路电阻为零，电压源的电流不能表达成其端电压的函数。



解决方法：将未知电流 I 设为变量列入KCL方程中。

$$\text{节点②: } \left(\frac{1}{25\Omega} + \frac{1}{20\Omega} + \frac{1}{40\Omega}\right)U_{n2} - \frac{1}{20\Omega}U_{n3} - \frac{1}{40\Omega}U_{n4} = 0$$

$$\text{节点③: } -\frac{1}{20\Omega}U_{n2} + \left(\frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{20\Omega}\right)U_{n3} = \frac{20\text{V}}{10\Omega} + I$$

$$\text{节点④: } -\frac{1}{40\Omega}U_{n2} + \left(\frac{1}{40\Omega} + \frac{1}{50\Omega}\right)U_{n4} = -\frac{10\text{V}}{50\Omega} - I$$

需根据电压源特性列补充方程

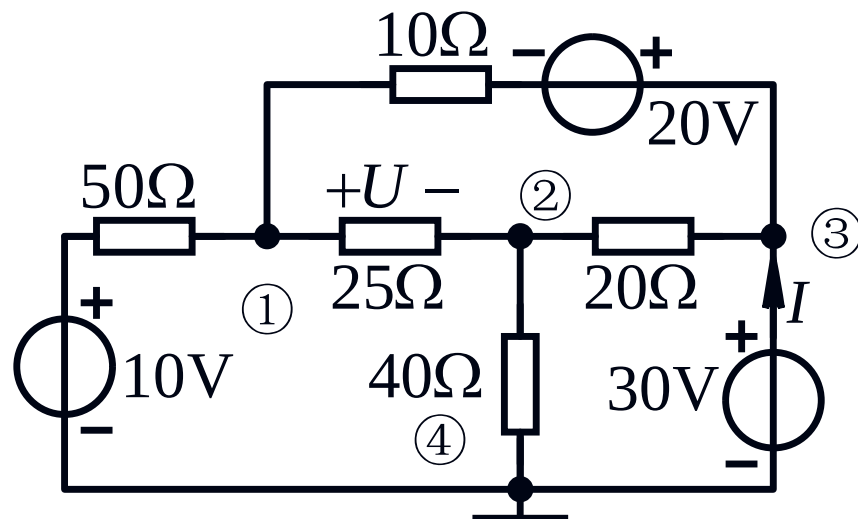
$$U_{n3} - U_{n4} = 30V$$

要点：1) 将电压源支路的电流设为变量列入方程

2) 补充电压源两端节点电压之差等于电压源的源电压

说明：若电路中存在非二端电阻元件(如存在纯电压源支路)，则这种支路的电流不能用支路电导与相关节点电压之积来表示。为解决这类问题，须对节点电压法进行修正，建立所谓的**改进节点电压法**。

若选择电压源的一端为参考点，则另一端的节点电压便是已知量，问题可以得到简化。

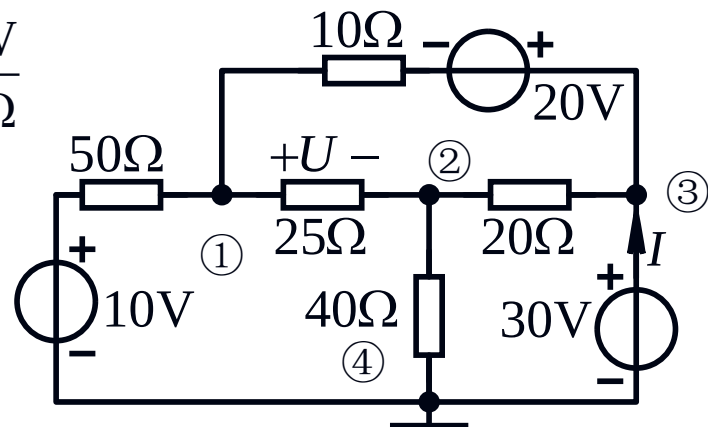


左图以节点④为参考点，则节点③的电压为30V，为已知量

$$\left(\frac{1}{50\Omega} + \frac{1}{25\Omega} + \frac{1}{10\Omega}\right)U_{n1} - \frac{1}{25\Omega}U_{n2} - \frac{1}{10\Omega} \times 30V = \frac{10V}{50\Omega} - \frac{20V}{10\Omega}$$

$$-\frac{1}{25\Omega}U_{n1} + \left(\frac{1}{25\Omega} + \frac{1}{40\Omega} + \frac{1}{20\Omega}\right)U_{n2} - \frac{1}{20\Omega} \times 30V = 0$$

$$-\frac{1}{10\Omega}U_{n1} - \frac{1}{20\Omega}U_{n2} + \left(\frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{20\Omega}\right)U_{n3} - I = \frac{20V}{10\Omega}$$



$$\begin{cases} 0.16U_{n1} - 0.04U_{n2} = 1.2V \\ -0.04U_{n1} + 0.115U_{n2} = 1.5V \end{cases}$$

解得 $U_{n1} \approx 11.79V$ $U_{n2} \approx 17.14V$

25Ω电阻两端电压及消耗功率分别为

$$U = U_{n1} - U_{n2} \approx 11.79V - 17.14V = -5.35V$$

$$P = \frac{U^2}{25\Omega} \approx 1.14W$$

例题 补充

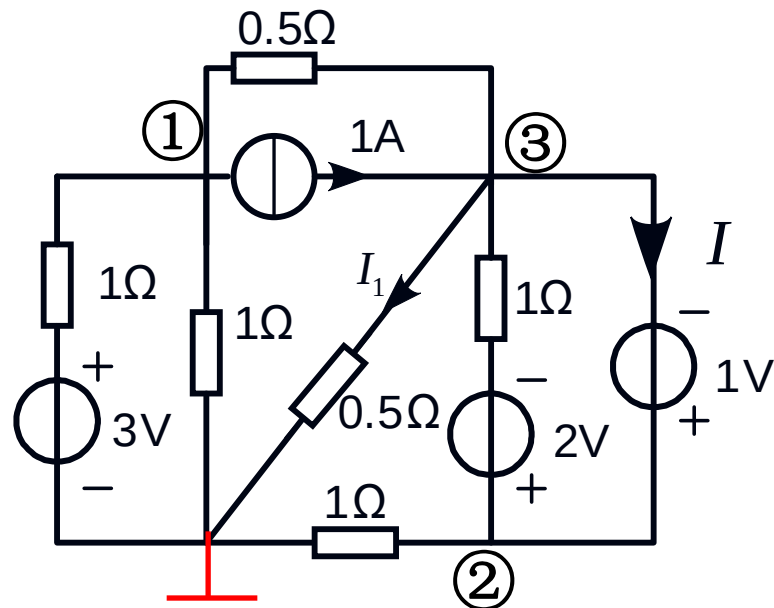
用节点电压法求 I_1

[解]

$$\textcircled{1}: \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{0.5\Omega}\right)U_{n1} - \frac{1}{0.5\Omega}U_{n3} = \frac{3\text{V}}{1\Omega} - 1\text{A}$$

$$\textcircled{2}: \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{1\Omega}\right)U_{n2} - \frac{1}{1\Omega}U_{n3} = \frac{2\text{V}}{1\Omega} + I$$

$$\textcircled{3}: -\frac{1}{0.5\Omega}U_{n1} - \frac{1}{1\Omega}U_{n2} + \left(\frac{1}{0.5\Omega} + \frac{1}{0.5\Omega} + \frac{1}{1\Omega}\right)U_{n3} = 1\text{A} - \frac{2\text{V}}{1\Omega} - I$$

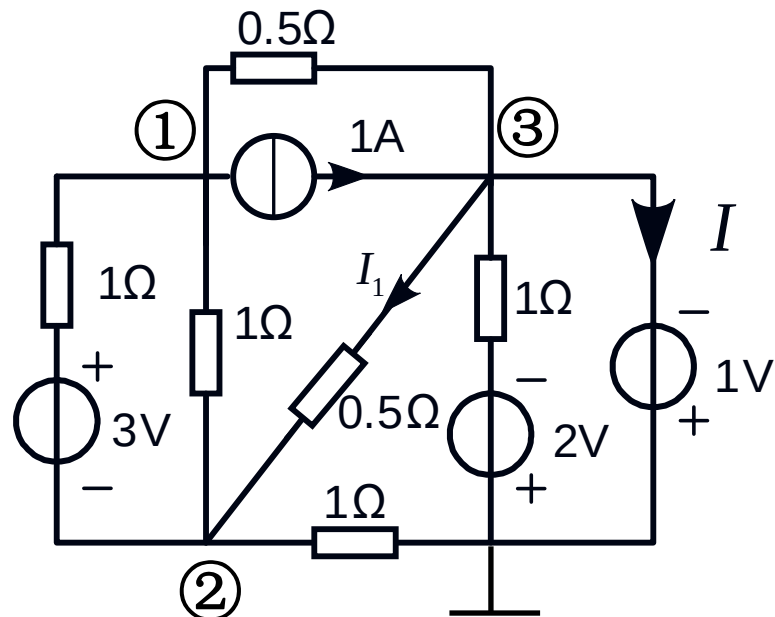


补充

$$U_{n2} - U_{n3} = 1\text{V}$$

$$U_{n1} = 0.625\text{V}, U_{n2} = 1.25\text{V}, U_{n3} = 0.25\text{V}, I_1 = 0.5\text{A}$$

重新编号



$$\textcircled{1}: \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{0.5\Omega}\right)U_{n1} - \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{1\Omega}\right)U_{n2} - \frac{1}{0.5\Omega}(-1\text{V}) = \frac{3\text{V}}{1\Omega} - 1\text{A}$$

$$\textcircled{2}: -\left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{1\Omega}\right)U_{n1} + \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{0.5\Omega}\right)U_{n2} - \frac{1}{0.5\Omega}(-1\text{V}) = \frac{-3\text{V}}{1\Omega}$$

$$U_{n1} = -0.625\text{V}, U_{n2} = -1.25\text{V}, I_1 = 0.5\text{A}$$

参考节点改变之后的各节点电压与原来基准下的相应的节点电压间只差了一个新旧节点之间的电压值!!

支路法、回路法和节点法的比较：

(1) 方程数的比较

	KCL方程	KVL方程	方程总数
支路法	$n-1$	$b-(n-1)$	b
回路法	0	$b-(n-1)$	$b-(n-1)$
节点法	$n-1$	0	$n-1$

(2) 对于非平面电路，选独立回路不容易，而独立节点较容易。

(3) 回路法、节点法易于编程。目前用计算机分析网络(电网，集成电路设计等)采用节点法较多。

题目没有指定的情况下，采用那种方法解题？

- 1: 当电路中的独立回路数少于独立结点数时,用回路电流法比较方便;
- 2: 当支路、网孔很多,而独立节点很少时,用节点电压法;
- 3: 任何时候都可以使用支路电流法。

小结

- ◆ 星形联接的电阻网络可以等效成三角形联接的电阻网络，反之亦然。星形联接比三角形联接多一个节点但少一个回路。
- ◆ 电压源与电阻串联支路可以等效变换成电流源与电阻并联支路，反之亦然。
- ◆ 支路电流法是以 b 条支路的支路电流为待求量，对 $n-1$ 个节点列KCL方程、对 $b-(n-1)$ 个独立回路列KVL方程。即沿回路各电阻电位降的代数和等于电源电位升的代数和。
- ◆ 回路电流法是在 $b-(n-1)$ 个独立回路中假设回路电流，并以其为待求量，按自阻、互阻、回路源电压等规则列写各独立回路的KVL方程。
- ◆ 根据集中参数电路中电压与计算路径无关的性质，定义节点电压，即任一节点与参考点之间的电压，参考点的节点电压为零。
- ◆ 节点电压法是以 $n-1$ 个节点电压为待求量，按自导、互导、节点源电流等规则列写 $n-1$ 个节点的KCL方程。
- ◆ 列写含受控源电路的方程时，首先将受控源按独立源来处理，然后再用待求量表示受控源的控制量，从而消去方程中的控制量。