第八章 频率特性和谐振现象

提要 通过正弦电流电路的学习得知，感抗和容抗分别与频率成正比和反比关系。由此得知电路特性与电源频率密切相关。本章专门研究电路特性与频率的关系。包括网络函数及其频率特性的概念及一般分析方法、典型电路的频率特性、串联谐振与并联谐振的条件及特点、滤波的概念等。

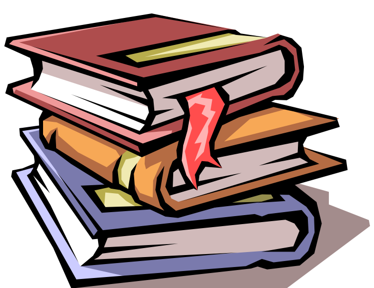
本章目次

1 网络函数和频率特性

2 *RLC*串联电路的频率特性

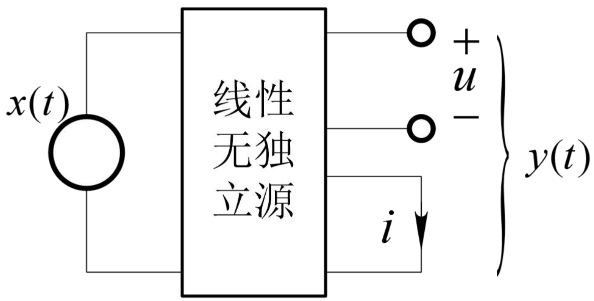
3 串联谐振电路

4 并联谐振电路

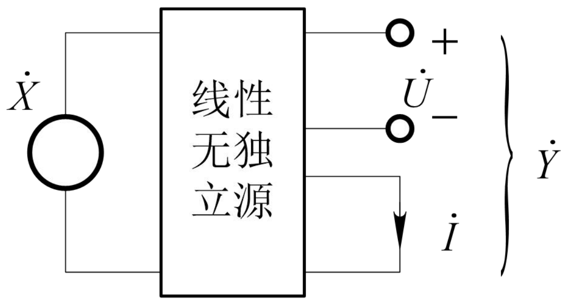


8.1 网络函数和频率特性

基本要求：掌握网络函数的定义、幅频特性和相频特性以及低通、高通、带通和带阻等概念。



(a) 时域分析



(b) 频域分析

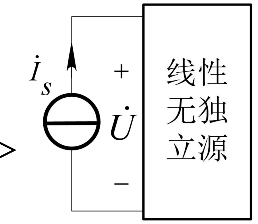
网络函数的定义: 响应相量与激励相量之比称为网络函数，即

$$H(\mathrm{j}\omega) \overset{\text{def}}{=} \frac{\dot{Y}}{\dot{X}}$$

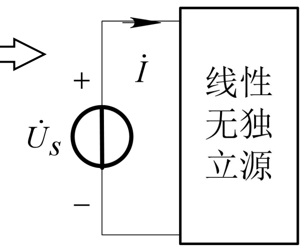
网络函数分类：

网络函数

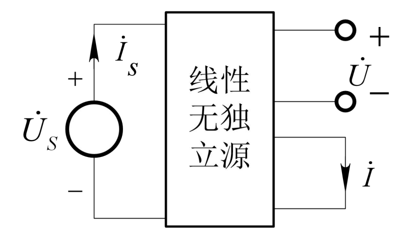
- 激励和响应属于同一端口
  - 等效输入阻抗 $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{U}/\dot{I}_{\mathrm{S}}$



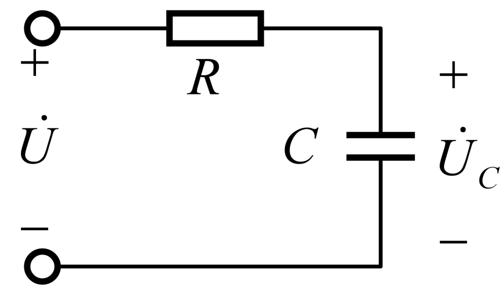
  - 等效输入导纳 $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{I}/\dot{U}_{\mathrm{S}}$



- 激励和响应属于不同端口
  - 转移电流比 $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{I}/\dot{I}_{\mathrm{S}}$
  - 转移阻抗 $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{U}/\dot{I}_{\mathrm{S}}$
  - 转移导纳 $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{I}/\dot{U}_{\mathrm{S}}$
  - 转移电压比 $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{U}/\dot{U}_{\mathrm{S}}$



在图示 ***RC*** 电路中，若以电容电压为响应，以输入电压为激励，其网络函数为:



RC串联电路

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_C}{\dot{U}}=\frac{1/\mathrm{j}\omega C}{R+1/\mathrm{j}\omega C}=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega CR}$$

将 $\dot{U}_C$ 、$\dot{U}$ 和 $H(\mathrm{j}\omega)$ 都写成极坐标式，即

$$|H(\mathrm{j}\omega)|\angle\theta(\omega)=\frac{U_C\angle\psi_C}{U\angle\psi}=\frac{U_C}{U}\angle(\psi_C-\psi)$$

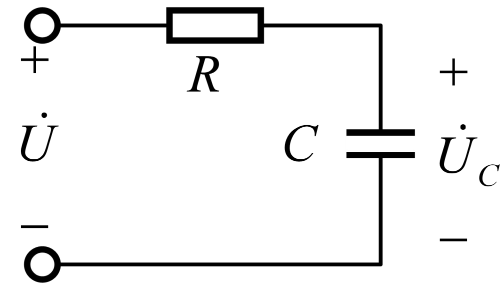
由此可得

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=U_C/U \xrightarrow{\text{网络函数的模}} \text{幅频特性}$$

$$\theta(\omega)=\psi_C-\psi \xrightarrow{\text{网络函数的辐角}} \text{相频特性}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{幅频特性}\\ \text{相频特性}\end{matrix}\right\}\ \text{频率特性}$$

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_C}{\dot{U}}=\frac{1/\mathrm{j}\omega C}{R+1/\mathrm{j}\omega C}=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega CR}$$



RC串联电路

式中 RC 之积具有时间的量纲，其倒数具有频率的量纲，可设

$$\omega_0=\frac{1}{RC}$$

称其为 RC 电路的固有角频率或自然角频率(natural angular frequency)

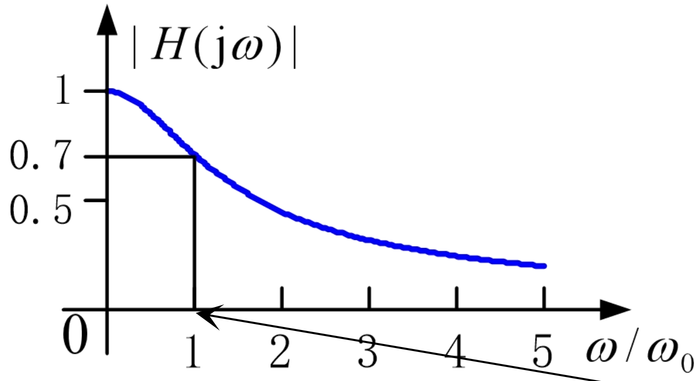
代入网络函数表达式得

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega/\omega_0}=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}\angle\left(-\arctan\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

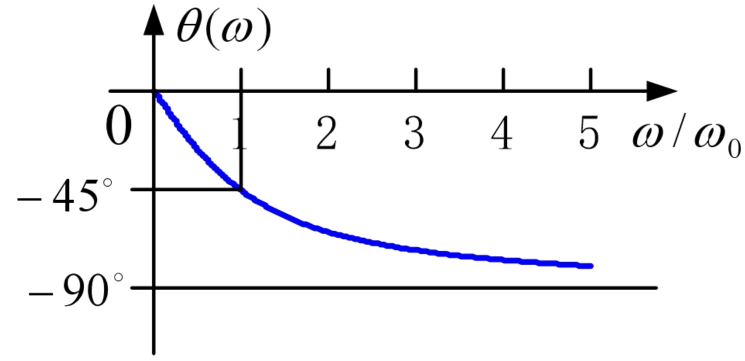
模和辐角与角频率的对应关系表

ω/ω_0	$\lvert H(\mathrm{j}\omega)\rvert$	$\theta(\omega)$
0	1	0°
1	$1/\sqrt{2}$	-45°
2	$1/\sqrt{5}$	-78.69°
…	…	…
∞	0	-90°

幅频特性和相频特性曲线



(a) 幅频特性曲线



(b) 相频特性曲线

将网络函数的模下降到最大值的$1/\sqrt{2}$时所对应的频率称为**截止频率**(cut-off frequency)，记为ω_c。

低通网络：网络允许低频信号顺利通过，而使高频信号产生较大衰减。

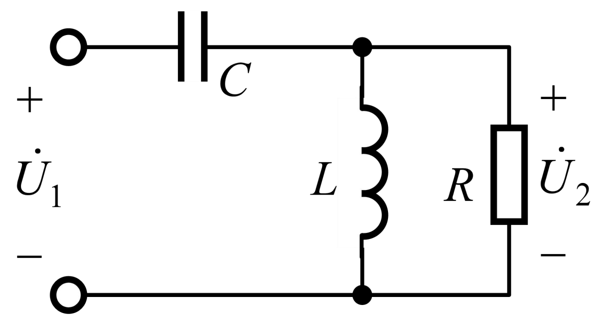
结论：

- **H(ω)表达电压大小传递关系**
- **ω不同，则H(jω)不同，导致电压传递关系不同。**
- **H(jω)表明RC是低通电路**
- **通带为0-ω_C，阻带为ω_C-∞**
- **φ(ω)表达电压相位传递关系**

半功率点：当信号频率等于截止频率时，**输出电压放大倍数下降到$1/\sqrt{2}$倍**，即相应的输出功率也降到最大值的一半，因此截止频率点也叫做半功率点。

例题 **8.1**

求图示电路的网络函数 $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{U}_2/\dot{U}_1$

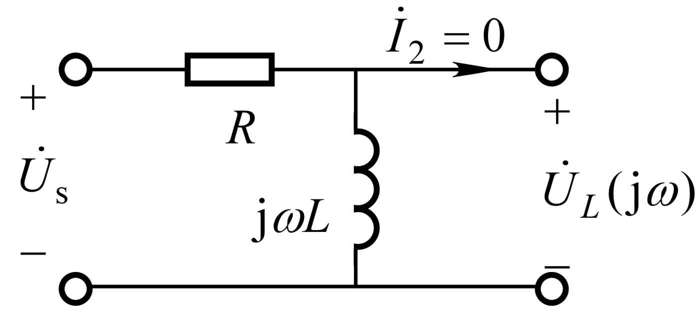


解

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{\dfrac{\mathrm{j}\omega L\times R}{\mathrm{j}\omega L+R}}{\dfrac{\mathrm{j}\omega L\times R}{\mathrm{j}\omega L+R}+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=\frac{-\omega^2}{-\omega^2+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{RC}+\dfrac{1}{LC}}$$

例题 补充

试分析图示RL网络。



***RL*串联电路**

解：在图示 *RL* 电路中，若以电感电压为响应，以输入电压为激励，其网络函数为：

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{\dot{U}_L}{\dot{U}} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{R + \mathrm{j}\omega L}$$

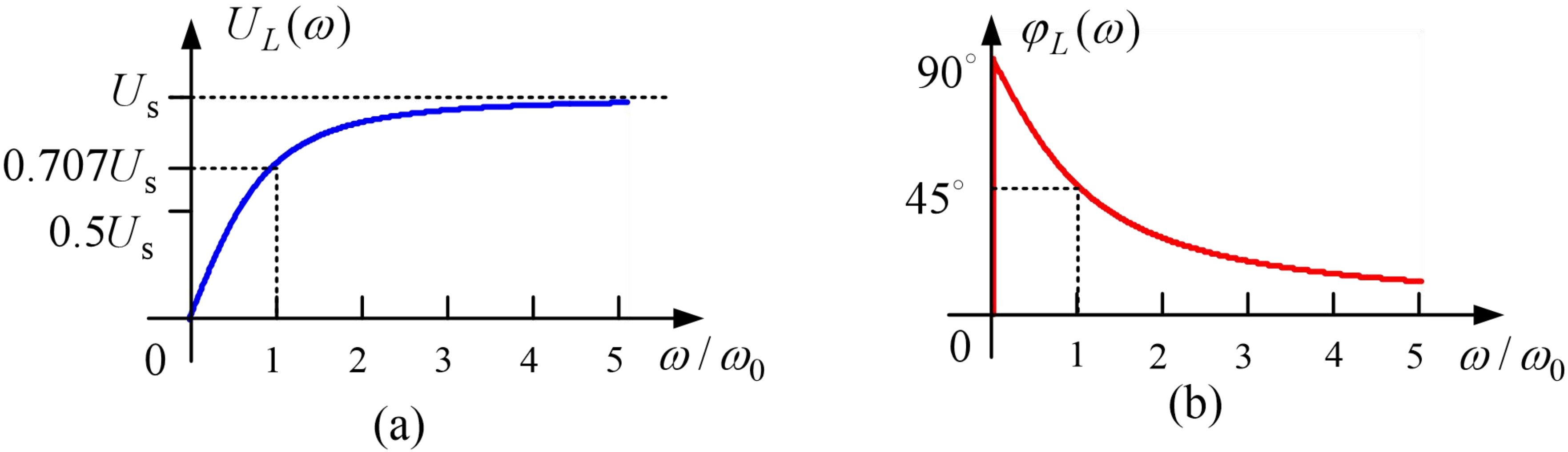
设

$$\omega_0 = \frac{R}{L}$$

称其为 *RL* 电路的固有角频率或自然角频率(natural frequency)

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{\mathrm{j}\omega/\omega_0}{1 + \mathrm{j}\omega/\omega_0} = \frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} \angle\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{j\omega/\omega_0}{1+\mathrm{j}\omega/\omega_0}=\frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}\angle(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\omega}{\omega_0})$$



RL电路的频率特性：（a）幅频特性；（b）相频特性

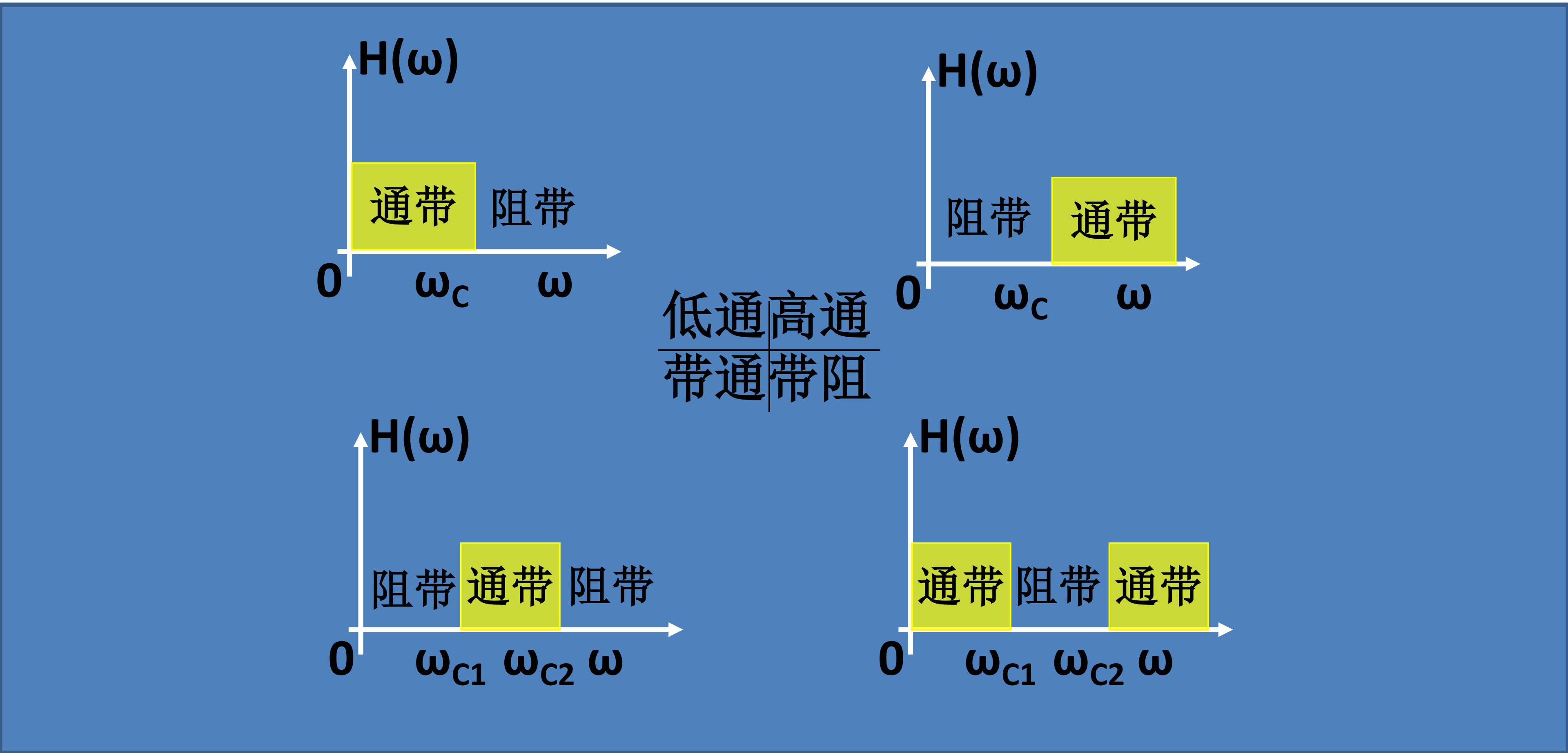
截止频率(cut-off frequency)

$$\omega_c=\omega_0=\frac{R}{L}$$

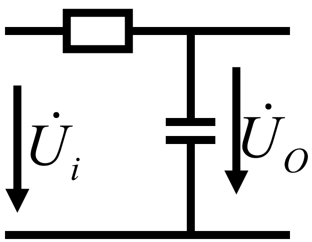
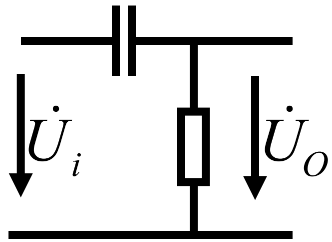
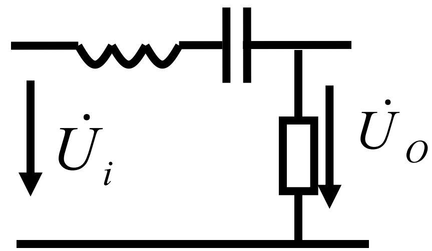
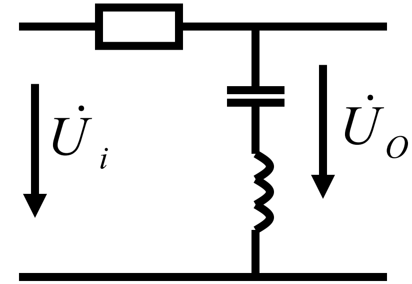
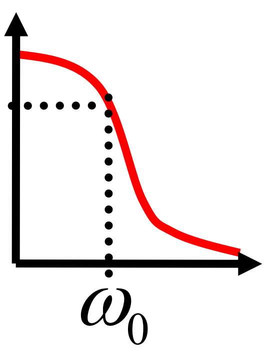
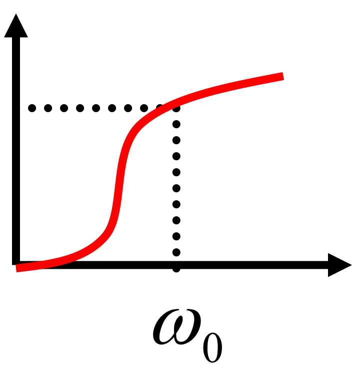
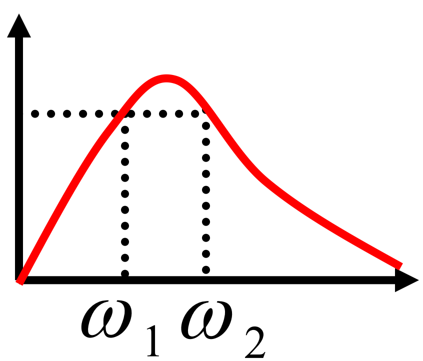
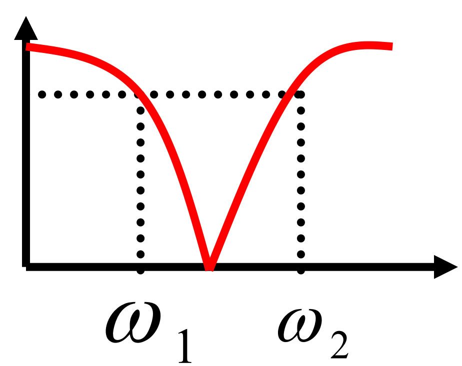
高通网络：网络允许高频信号顺利通过，而使低频信号产生较大衰减。

定义：滤波器(filter),具有频率选择作用的网络。

分类：常见如下几种：



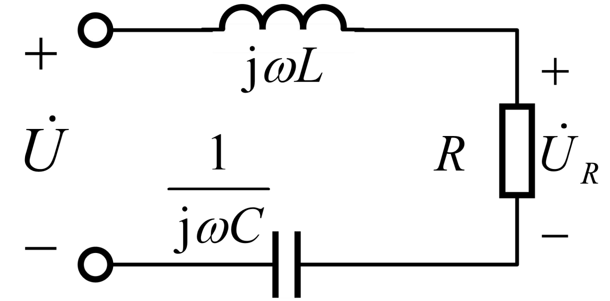
典型的网络函数

	低通	高通	带通	带阻
电路举例				
传递函数	$H(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega RC}$ 	$H(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\dfrac{1}{\omega RC}}$ 	$H(j\omega)=\dfrac{R}{R+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}$ 	$H(j\omega)=\dfrac{j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}{R+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}$ 

8.2 RLC串联电路的频率特性

基本要求：掌握*RLC*串联电路用不同元件电压作为响应时的频率特性特点，以及谐振角频率、特性阻抗和品质因数的概念。

1 当以电阻电压 $\dot{U}_R$ 为响应时，其网络函数(即转移电压比为)



***RLC*串联电路**

$$H_R(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_R}{\dot{U}}=\frac{R}{R+\mathrm{j}[\omega L-1/(\omega C)]}$$

当频率达到某一量值时有：$\omega_0 L=1/(\omega_0 C)$，即 $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

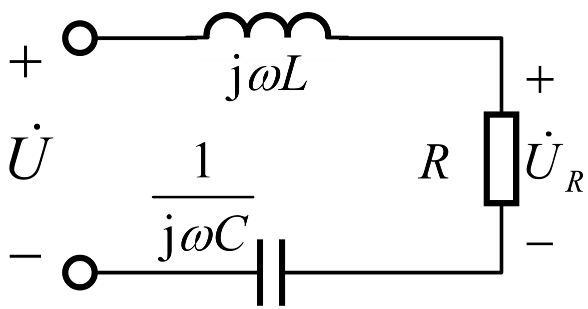
称为*RLC*串联电路的**谐振角频率**。

令 $\rho=\omega_0 L=1/\omega_0 C$

称为*RLC*串联电路的**特性阻抗**。

又令 $Q=\dfrac{\rho}{R}=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 进而有 $Q=\dfrac{\omega_0 L}{R}=\dfrac{1}{R\omega_0 C}$

称为*RLC*串联电路的**品质因数**。



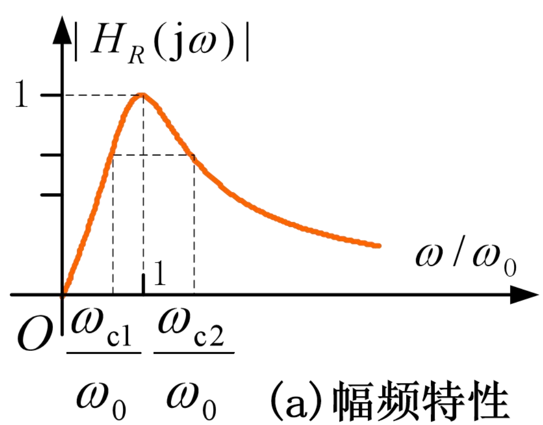
$$H_R(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_R}{\dot{U}}=\frac{R}{R+\mathrm{j}[\omega L-1/(\omega C)]}$$

*RLC*串联电路

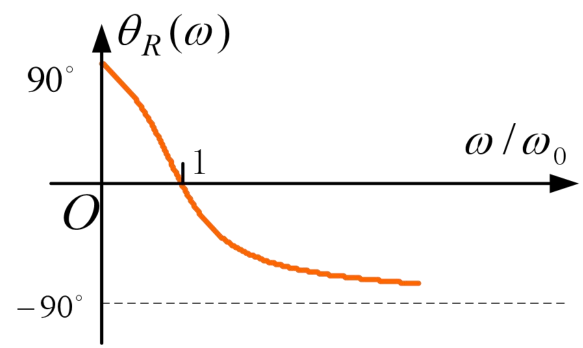
将谐振角频率和品质因数引入上式，写出其幅频特性和相频特性：

$$|H_R(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{R^2}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\theta_R(\omega)=-\arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$



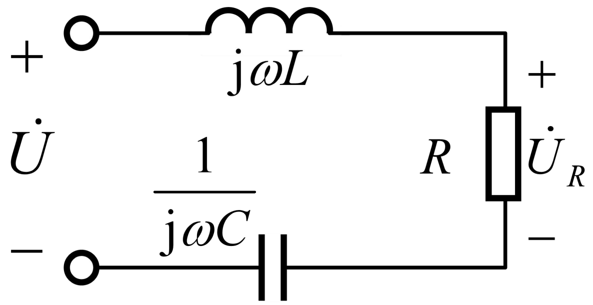
(a) 幅频特性



(b) 相频特性

以电阻电压为响应的网络函数频率特性曲线

带通网络：网络允许 ω_0 附近的信号通过，而使其他信号产生较大衰减。



***RLC*串联电路**

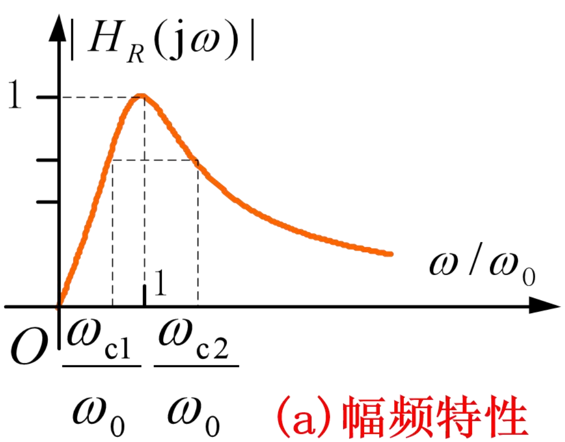
$$|H_R(\mathrm{j}\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

截止频率有两个，之间的范围称为带宽

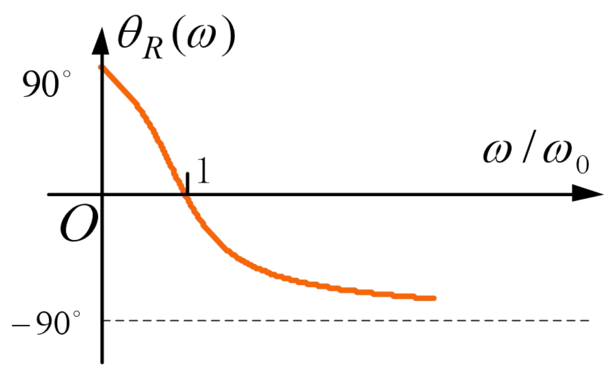
$$\omega_{c1} = \omega_0\left(-\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1}\right)$$

$$\omega_{c2} = \omega_0\left(\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1}\right)$$

$$\Delta\omega = \omega_{c2}-\omega_{c1} = \omega_0 / Q$$



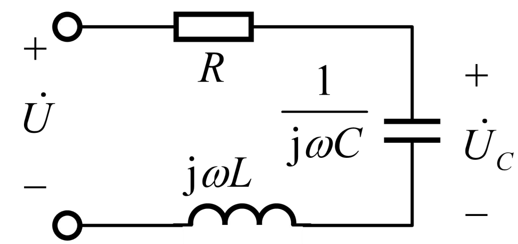
(a) 幅频特性



(b) 相频特性

2 以电容电压u_C为响应，有：

$$H_C(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_C}{\dot{U}}=\frac{1/(\mathrm{j}\omega C)}{R+\mathrm{j}\omega L+1/(\mathrm{j}\omega C)}$$



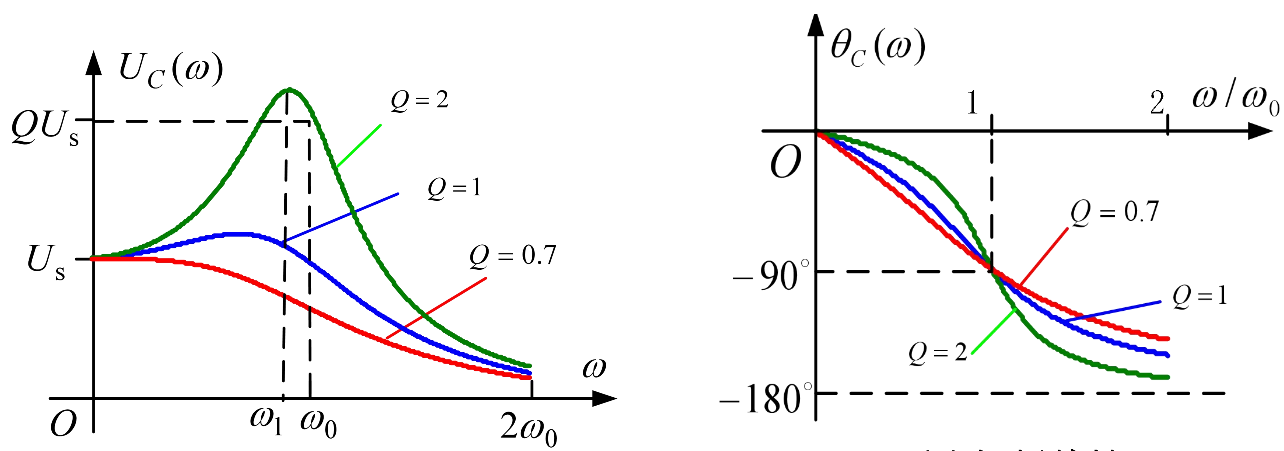
RLC串联电路

幅频特性和相频特性分别为

$$|H_C(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\theta_C(\omega)=-\arctan\frac{1}{Q\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

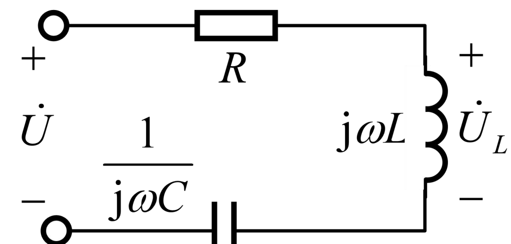
对应不同品质因数的频率特性曲线如下：



(a) 幅频特性　　(b) 相频特性

以电容电压为响应的网络函数频率特性曲线

3 若以电感电压为响应，其转移电压比为：



*RLC*串联电路

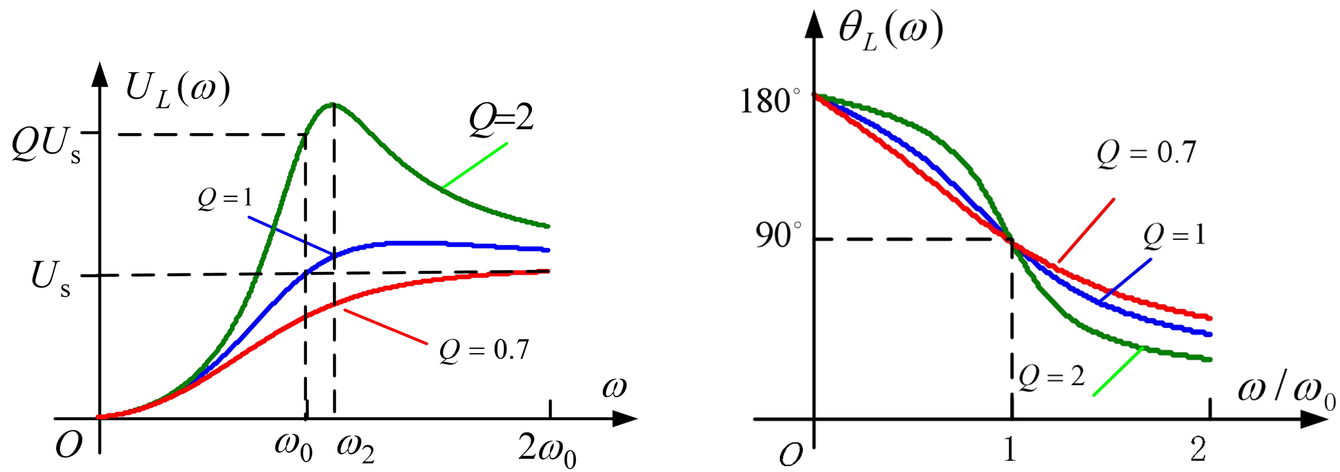
$$H_L(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_L}{\dot{U}}=\frac{\mathrm{j}\omega L}{R+\mathrm{j}\omega L+1/(\mathrm{j}\omega C)}$$

则其幅频特性和相频特性分别为：

$$|H_L(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]^2+\frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\theta_L(\omega)=-\arctan\frac{-1}{Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

对应不同品质因数的频率特性曲线如图：



(a) 幅频特性　(b) 相频特性

以电感电压为响应的网络函数频率特性曲线

例题 **8.2**

设计 *RLC* 串联带通滤波器电路，已知总电阻为R=20Ω，要求谐振频率为 f_0 =10⁴Hz，带宽为 Δf =10³Hz,，求电感L和电容C的值以及低频截止频率和高频截止频率。

解

由公式 $\omega_{c1}=\omega_0\left(-\dfrac{1}{2Q}+\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2}+1}\right)$ 和 $\omega_{c2}=\omega_0\left(\dfrac{1}{2Q}+\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2}+1}\right)$

可求得品质因数为 $$Q=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}=\frac{f_0}{\Delta f}=10$$

进一步求得：

$$C=\frac{1}{QR\omega_0}=\frac{1}{10\times 20\Omega\times(2\pi\times 10^4)\text{s}^{-1}}\approx 0.0796\mu\text{F}\quad L=\frac{QR}{\omega_0}=\frac{10\times 20\Omega}{(2\pi\times 10^4)\text{s}^{-1}}\approx 3.18\text{mH}$$

最后求得低频和高频截止频率分别为

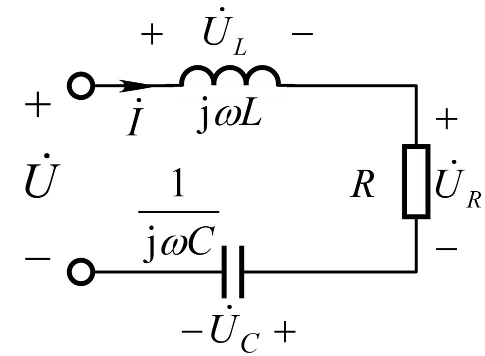
$$f_{c1}=f_0\left(-\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1}\right)\approx f_0\left(-\frac{1}{2Q}+1\right)=9500\text{Hz}$$

$$f_{c2}=f_0\left(+\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1}\right)\approx f_0\left(+\frac{1}{2Q}+1\right)=10500\text{Hz}$$

8.3 串联谐振电路

基本要求：透彻理解谐振的概念及*RLC*串联谐振电路谐振条件与谐振特点。

定义：对于含有电感和电容的一端口电路，如果在一定条件下呈现电阻性，即端口电压与电流同相位，则称此一端口电路发生**谐振**(resonance)。



*RLC*串联谐振电路

右图为*RLC***串联谐振**(series resonance)电路。

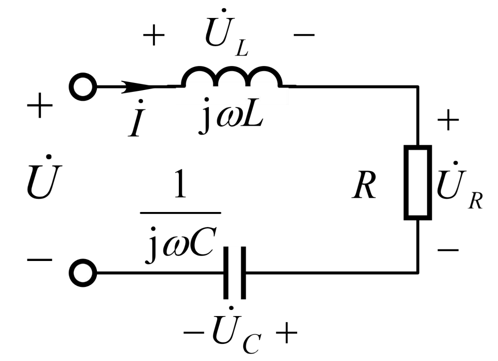
根据谐振定义，*RLC*串联电路发生谐振的条件是：

$$\mathrm{Im}[Z]=\mathrm{Im}[R+\mathrm{j}(\omega L-\frac{1}{\omega C})]=0 \quad \text{即} \quad \omega L=1/(\omega C)$$

改变电源频率，或改变电感，或改变电容均可实现串联谐振。在给定电感和电容时，电路的谐振角频率为

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

***RLC*串联电路的电流、电感电压和电容电压分别为**



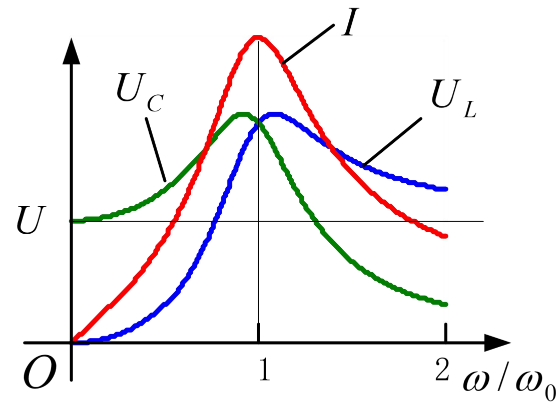
***RLC*串联谐振电路**

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_R}{R}=H_R(\mathrm{j}\omega)\frac{\dot{U}}{R}$$

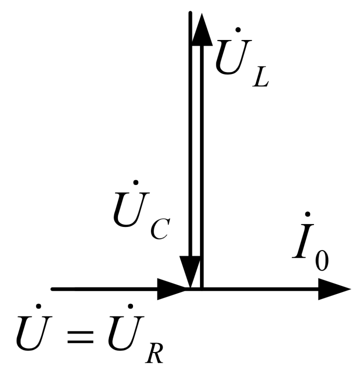
$$\dot{U}_C=H_C(\mathrm{j}\omega)\dot{U}$$

$$\dot{U}_L=H_L(\mathrm{j}\omega)\dot{U}$$

由上三式，可画出电流 I 和电压U_C、U_L随频率变动的曲线[下图(a)]，以及谐振时的相量图［下图(b)］（以电流为参考相量）



(a) 随频率变动曲线



(b) 谐振时相量图

串联谐振的特点

1 阻抗方面

$$\omega_0 L = 1/(\omega_0 C)$$

谐振时，感抗与容抗相抵消，串联电路呈电阻性。

2 电流方面

此时串联电路电流为： $\dot{I}_0 = \dfrac{\dot{U}}{R}$ 达到最大值。

3 电压方面

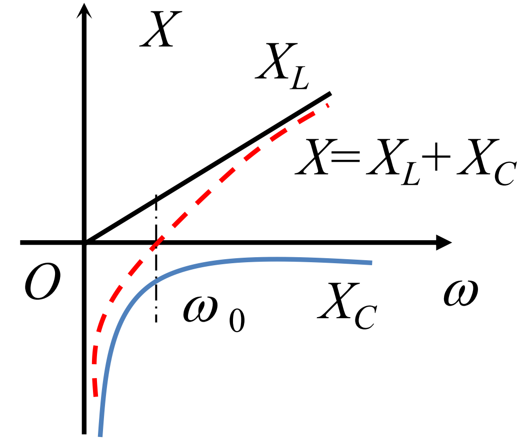
$$\dot{U}_L = \mathrm{j}\omega_0 L \dot{I}_0 \qquad \dot{U}_C = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega_0 C}\dot{I}_0$$

由于特性阻抗和品质因数为

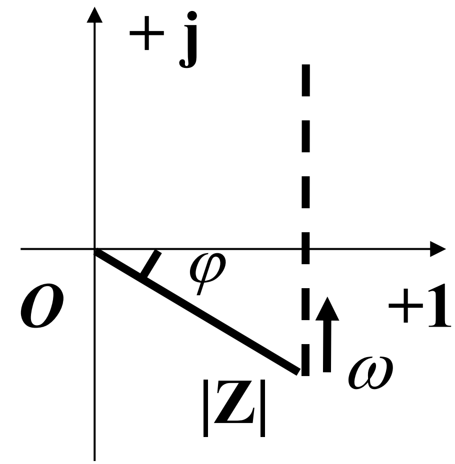
$$Q = \rho / R \qquad \rho = \omega_0 L = 1/(\omega_0 C)$$

代入上式得

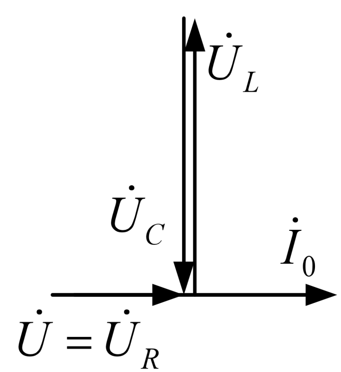
$$U_L = U_C = \rho I_0 = \rho \frac{U}{R} = QU$$



电抗频率特性曲线



阻抗随频率变化时在复平面上表示的图形



串联谐振相量图

品质因数

谐振时有 $\dot{U}_L + \dot{U}_C = 0$

所以串联谐振又称为电压谐振。

串联谐振电路的品质因数

$$Q = \frac{U_L(\omega_0)}{U} = \frac{U_C(\omega_0)}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

如果**Q>1**，则有 $U_L = U_C > U$

当**Q>>1**，表明在谐振时或接近谐振时，会在电感和电容两端出现大大高于外施电压**U**的高电压，称为过电压现象，往往会造成元件的损坏。

但谐振时**L**和**C**两端的等效阻抗为零（相当于短路）。

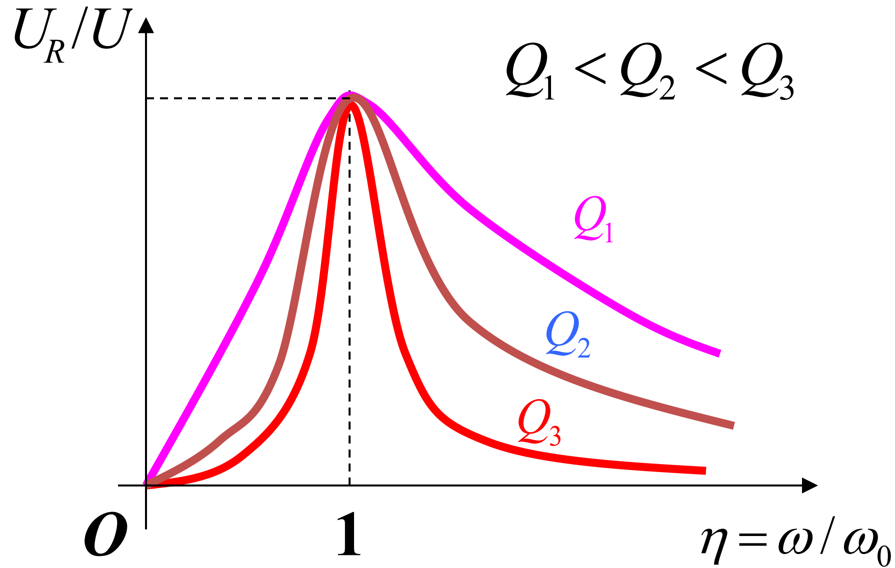
◆ 串联电阻的大小虽然不影响串联谐振电路的固有频率，但有控制和调节谐振时电流和电压幅度的作用。

电路的选择性

串联谐振电路对偏离谐振点的输出有抑制能力，只有在谐振点附近的频域内，才有较大的输出幅度，电路的这种性能称为选择性。

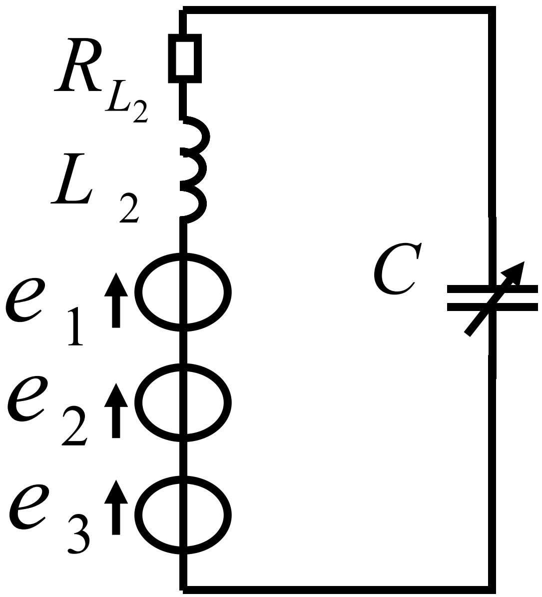
$$Q = \omega_0 / \Delta\omega$$

电路选择性的优劣取决于对非谐振频率的输入信号的抑制能力。



- Q值大，曲线在谐振点附近的形状尖锐，当稍偏离谐振频率，输出就急剧下降，说明对非谐振频率的输入具有较强的抑制能力，选择性能好，但通频带窄。
- 反之，Q值小，在谐振频率附近曲线顶部形状平缓，选择性就差，但通频带宽。
- 选择性与通频带之间的矛盾需要兼顾考虑。

问题：如果要收听 e_1 节目，C 应配多大？



已知：

$$L_2 = 250\mu\text{H}、\quad R_{L_2} = 20\Omega$$

$$f_1 = 820 \text{ kHz}$$

解：$f_1 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C}}$

$$C = \frac{1}{(2\pi f)^2 L_2}$$

$$\boxed{C = \frac{1}{(2\pi \times 820 \times 10^3)^2 \cdot 250 \times 10^{-6}} = 150\,\text{pF}}$$

结论：当 C 调到 150 pF 时，可收听到 e_1 的节目。

功率

谐振时，电路的无功功率为零，这是由于阻抗角为零，所以电路的功率因数

$$\lambda = \cos\phi = 1$$

$$P(\omega_0) = UI\lambda = UI = \frac{1}{2}U_m I_m$$

$$Q_L(\omega_0) = \omega_0 L I^2 \qquad Q_C(\omega_0) = -\frac{1}{\omega_0 C} I^2 \qquad Q_L(\omega_0) + Q_C(\omega_0) = 0$$

整个电路的复功率 $\overline{S} = P + j(Q_L + Q_C) = P$

谐振时电路不从外部吸收无功功率。

但 $Q_L(\omega_0), Q_C(\omega_0)$ 分别不等于零，电路内部的电感与电容之间周期性地进行磁场能量和电场能量的交换

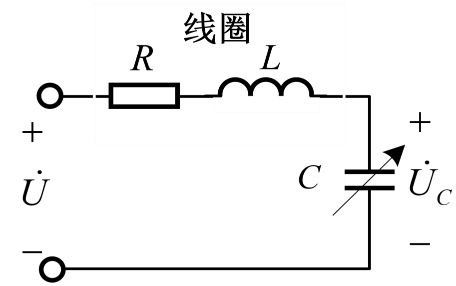
这一能量的总和为

$$W(\omega_0) = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2$$

例题 **8.3**

一个线圈与电容相串联，线圈电阻R=16.2Ω，电感L=0.26mH，当把电容调节到100pF时发生串联谐振。(1)求谐振频率和品质因数；(2)设外加电压为10μV，其频率等于电路的谐振频率，求电路中的电流和电容电压；(3)若外加电压仍为10μV，但其频率比谐振频率高10%，再求电容电压。

解 (1)谐振频率和品质因数分别为



线圈与电容串联电路

$$f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{0.26\times10^{-3}\,\mathrm{H}\times100\times10^{-12}\,\mathrm{F}}}=990\times10^3\,\mathrm{Hz}$$

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{2\pi f_0 L}{R}=\frac{2\pi\times990\times10^3\,\mathrm{s}^{-1}\times0.26\times10^{-3}\,\mathrm{H}}{16.2\Omega}=100$$

(2) 谐振时的电流和电容电压为

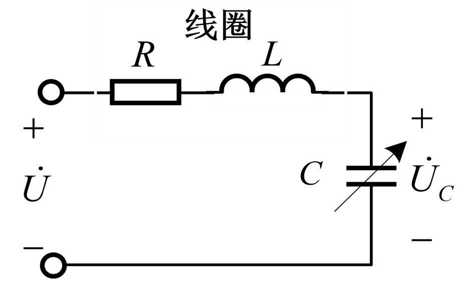
$$I_0=\frac{U}{R}=\frac{10\times10^{-6}\,\mathrm{V}}{16.2\Omega}=0.617\,\mu\mathrm{A}$$

$$X_C=-\frac{1}{\omega_0 C}=-\frac{1}{(2\pi\times990\times10^3)\mathrm{s}^{-1}\times100\times10^{-12}\,\mathrm{F}}=-1620\,\Omega$$

$$U_C=|X_C|I_0=1620\Omega\times0.617\times10^{-6}\,\mathrm{A}=1\mathrm{mV}$$

U_C可用下式直接得到

$$U_C = QU = 100 \times 10 \times 10^{-6}\,\text{V} = 1\text{mV}$$



线圈与电容串联电路

(3) 电源频率比电路谐振频率高10%的情形

$$f' = (1+0.1) f_0 = 1.1 \times 990 \times 10^3\,\text{Hz} = 1089 \times 10^3\,\text{Hz}$$

$$X_L' = \omega' L = (2\pi \times 1089 \times 10^3)\text{s}^{-1} \times 0.26 \times 10^{-3}\,\text{H} = 1780\Omega$$

$$X_C' = -\frac{1}{\omega' C} = -\frac{1}{(2\pi \times 1089 \times 10^3)\text{s}^{-1} \times 100 \times 10^{-12}\,\text{F}} = -1460\Omega$$

$$|Z'| = \sqrt{R^2 + (X_L' + X_C')^2} = \sqrt{(16.2)^2 + (1780 - 1460)^2}\,\Omega = 320\Omega$$

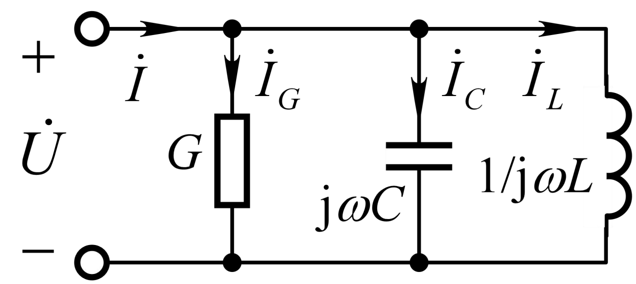
$$U_C' = \frac{U}{|Z'|} \times |X_C'| = \frac{10 \times 10^{-6}\,\text{V}}{320\Omega} \times 1460\Omega = 0.046\text{mV}$$

基本要求：掌握*GCL*并联谐振电路的条件和特点并与*RLC*串联谐振加以对比。

一、 *GCL*并联谐振电路

GCL并联电路的导纳为：

$$Y = G + \mathrm{j}(\omega C - 1/\omega L) = G + \mathrm{j}B$$



*GCL*并联谐振电路

实现谐振的条件是导纳的虚部为零，

$$\omega C - 1/\omega L = 0$$

谐振角频率为 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

并联谐振的特点

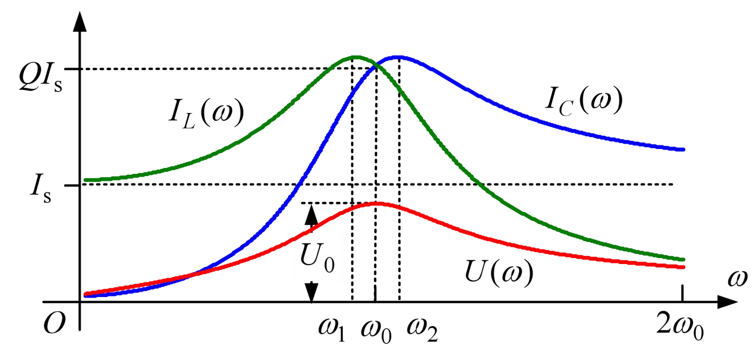
谐振时导纳达到最小值，即 $|Y|=G$ 或者说输入阻抗最大

在总电流有效值一定的条件下，并联电压达到最大，可以根据这一现象判别并联电路谐振与否 $\dot{U}_0 = \dot{I}/Y = \dot{I}/G$

在电感和电容中产生较大电流(但不是最大)

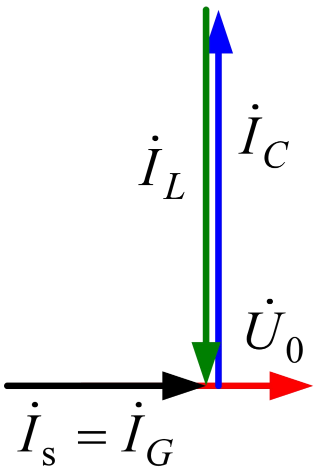
$$\dot{I}_L = \dot{U}_0/(\mathrm{j}\omega_0 L) = -\mathrm{j}\dot{I}/(\omega_0 LG)$$

$$\dot{I}_C = \mathrm{j}\omega_0 C\dot{U}_0 = \mathrm{j}\omega_0 C\dot{I}/G$$



品质因数

并联谐振时有 $\dot{I}_L + \dot{I}_C = 0$ 所以并联谐振又称**电流谐振**。



$$Q = \frac{I_L(\omega_0)}{I_S} = \frac{I_C(\omega_0)}{I_S} = \frac{1}{\omega_0 LG} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

如果Q>>1，则谐振时在电感和电容中会出现过电流，但从L、C两端看进去的等效电纳等于零，即阻抗为无限大，相当于开路。

功率和能量

谐振时无功功率 $Q_L = \frac{1}{\omega_0 L}U^2$ $Q_C = -\omega_0 CU^2$

所以 $Q_L + Q_C = 0$

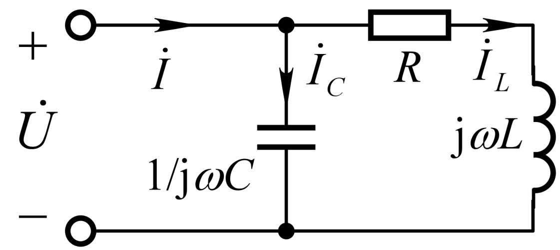
表明在谐振时，电感的磁场能量与电容的电场能量彼此相互交换，两种能量的总和为

$$W(\omega_0) = W_L(\omega_0) + W_C(\omega_0) = LQ^2 I_S^2 = 常数$$

串并联谐振回路比较

	并联	串联
电路结构	L.C.G并联	C.L.r串联
激励信号源	电流源 I_S	电压源 V_S
谐振角频率	$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
谐振阻抗	$Y(\omega_0) = G$	$Z(\omega_0) = r$
品质因数	$Q = \omega_0 C R_p = \frac{R_p}{\omega_0 L}$	$Q = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{1}{r\omega_0 C}$
谐振时电流(电压)	$I_L = I_C = QI_S$	$V_L = V_C = QV_S$

二、 电感线圈和电容器构成并联谐振电路，即*RL*与*C*并联谐振电路。



线圈与电容并联谐振

电路模型如右图，等效复导纳为

$$Y=\frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L}+\mathrm{j}\omega C=\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}+\mathrm{j}[\omega C-\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}]$$

产生谐振的条件是导纳的虚部为零,当改变频率时，可得谐振角频率：

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}}$$ （当 $R<\sqrt{L/C}$ 时存在）

所以$R>\sqrt{\dfrac{L}{C}}$时，虚部恒为正，电路始终保持容性，故不会发生谐振.

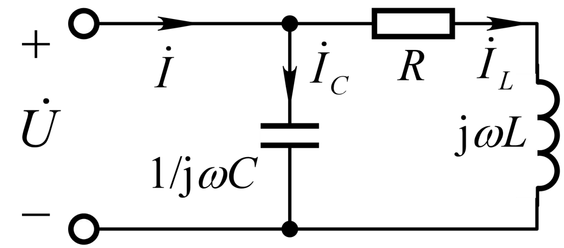
因此谐振时电容为 $$C_0=\frac{L}{R^2+(\omega L)^2}$$

谐振时电感为：

$$L_0=\frac{1\pm\sqrt{1-4\omega^2C^2R^2}}{2\omega^2C}$$

（若R为外接电阻时，当$R<1/2\omega C$ 时存在谐振）

RL 与 C 并联谐振的特点



线圈与电容并联谐振

谐振时其等效阻抗为一个电阻，记为

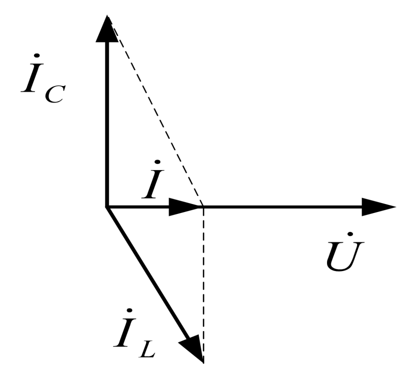
$$R_0 = \frac{R^2 + (\omega_0 L)^2}{R}$$

将谐振角频率代入上式得：$R_0 = R + \frac{L^2}{R}\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}\right) = \frac{L}{RC}$

元器件的品质因数定义：

- 线圈的品质因数可定义为谐振频率下感抗与串联电阻之比，即 $Q_L = \omega_0 L / R$
- 如电容器损耗不能忽略，用并联的漏电导G表示，电容的品质因数定义为谐振时的容纳与并联电导之比，即$\boldsymbol{Q_C = \omega_0 C / G}$

如果线圈与电容相并联的电路用一定的电流源来激励，在谐振时由于阻抗接近于最大值，电压 U 也接近于最大值，这时在线圈和电容中产生的电流可能比电源电流大得多。



谐振时电压电流相量图

例题 8.4

一个电感为0.25mH，电阻为25Ω的线圈与85pF的电容器接成并联电路，试求该并联电路的谐振频率和谐振时的阻抗。

解 谐振角频率和谐振频率分别为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}}=\sqrt{\frac{1}{0.25\times10^{-3}\mathrm{H}\times85\times10^{-12}\mathrm{F}}-\frac{(25\Omega)^2}{(0.25\times10^{-3}\mathrm{H})^2}}$$

$$=\sqrt{4.7\times10^{13}-10^{10}}\,\mathrm{rad/s}\approx6.86\times10^{6}\,\mathrm{rad/s}$$

$$f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{(6.86\times10^{6})\mathrm{s}^{-1}}{2\pi}\approx1092\mathrm{kHz}$$

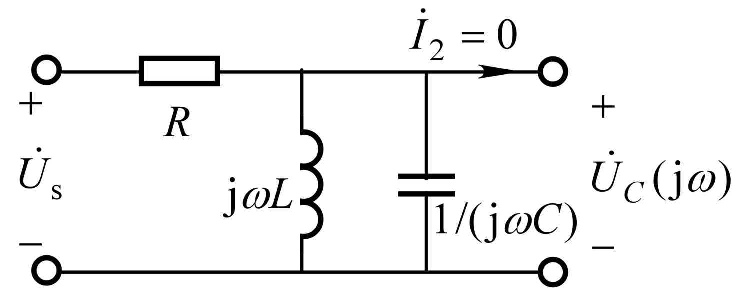
谐振时的阻抗为 $Z=\frac{R^2+(\omega_0L)^2}{R}=\frac{(25\Omega)^2+(6.86\times10^{6}\times0.25\times10^{-3}\Omega)^2}{25\Omega}$

$$=\frac{25^2+(1.72\times10^{3})^2}{25}\Omega\approx\frac{(1.72\times10^{3})^2}{25}\Omega=118\mathrm{k}\Omega$$

或直接由 $R_0=R+\frac{L^2}{R}\left(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}\right)=\frac{L}{RC}$ 得 $Z=R_0=\frac{L}{RC}=\frac{0.25\times10^{-3}\mathrm{H}}{25\Omega\times85\times10^{-12}\mathrm{F}}=118\mathrm{k}\Omega$

例题 补充

图示 ***RLC*电路中，网络函数为:**



***RLC*电路**

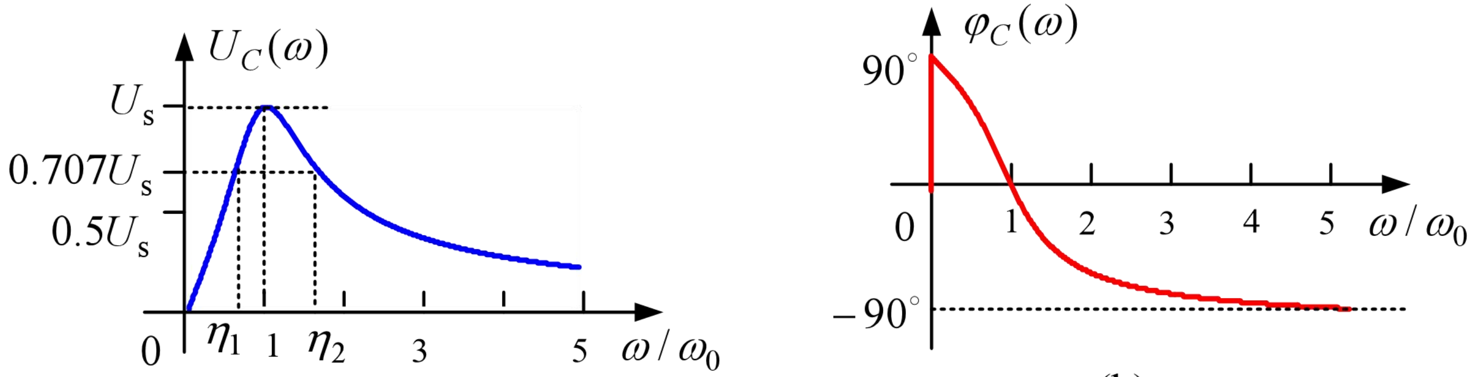
$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_C}{\dot{U}}=\frac{\mathrm{j}\omega L}{R-\omega^2 RLC+\mathrm{j}\omega L}$$

$$=\frac{\mathrm{jQ}(\omega/\omega_0)}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2+\mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

品质因数 $Q=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$$=\frac{\mathrm{Q}(\omega/\omega_0)}{\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\angle\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\mathrm{Q}(\omega/\omega_0)}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

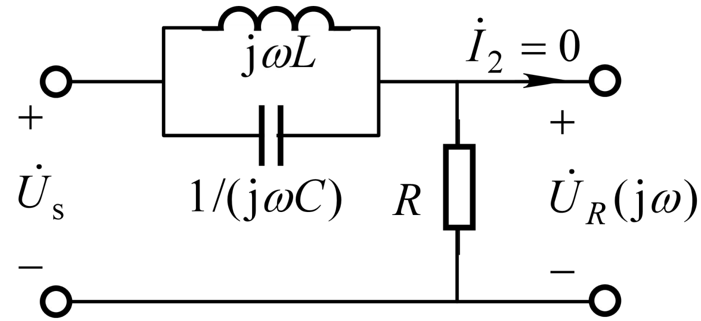


(a) (b)

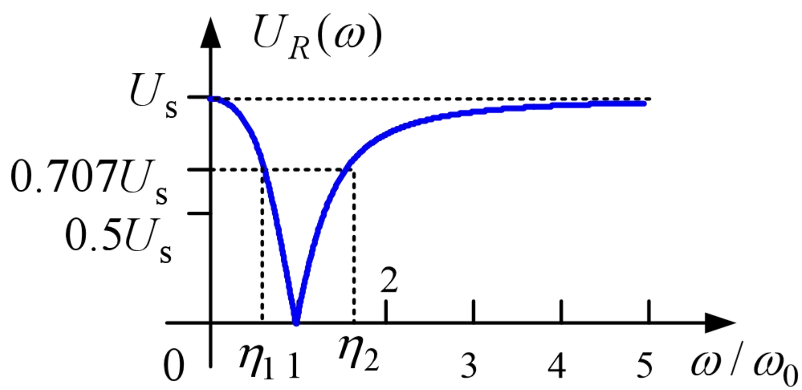
RLC电路的频率特性：（a）幅频特性；（b）相频特性

$$BW = (\eta_2 - \eta_1)\omega_0$$

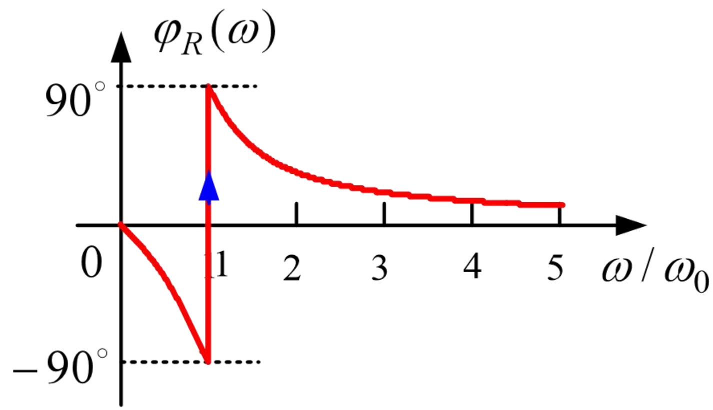
图示 *RLC*电路中，网络函数为:



***RLC*电路**



(a)



(b)

RLC电路的频率特性：（a）幅频特性；（b）相频特性

带阻网络：网络对ω_0附近的信号衰减很大。阻带宽度为

$$SBW = (\eta_2 - \eta_1)\omega_0$$

波特图： 对于变化范围较宽的频率特性，为展宽视野，其特性横坐标改用对数坐标，表示归一化频率；纵坐标用G(分贝)表示，便构成波特图。

ω/ω_0	1/10	1	10	100	……
$\lg \omega/\omega_0$	-1	0	1	2	……

$H(\omega)$	0.001	0.01	0.1	0.707	1	10	100
$20\lg H(\omega)$	-60	-40	-20	-3	0	20	40

◆什么是波特图？

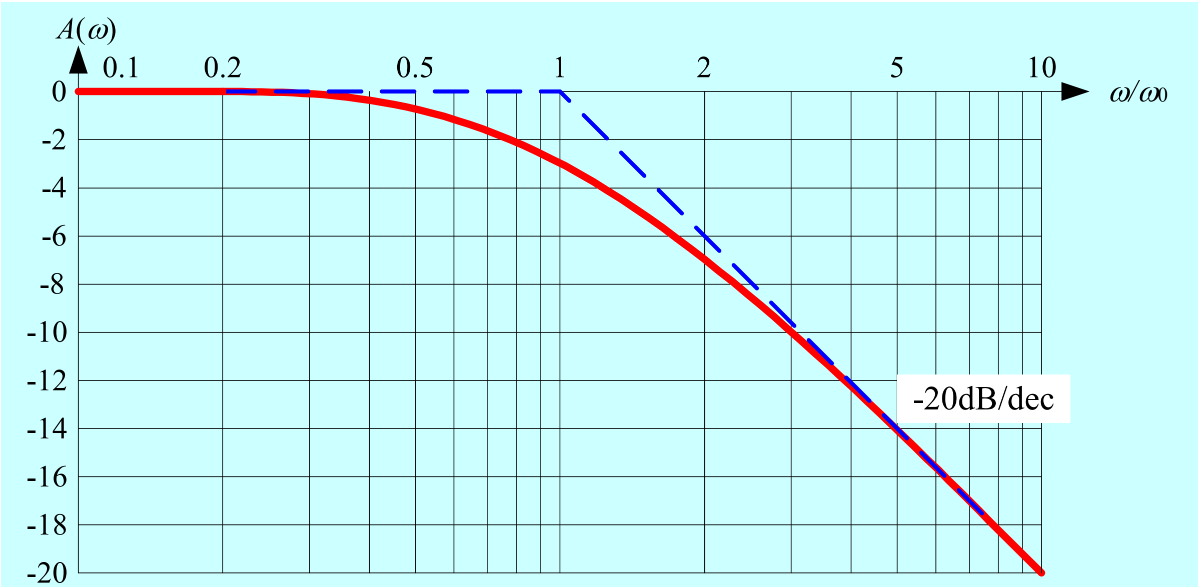
◆ 做图时不是用逐点描绘曲线，而是采用折线近似的方法画出的对数频率特性，通常称为波特图。就是横坐标频率f采用lgf对数刻度，这样将频率的大幅度的变化范围压缩在一个小范围内(例如用1～6代表10～10^6)，幅频特性的纵坐标电压增益，用分贝(dB)表示为20lgA，(当A从10倍变化到1000倍时，分贝值只从20变化到60)。这样绘出的20lgA~lgf的关系曲线称为对数幅频特性。而相频特性的纵坐标相移Φ采用线性刻度，绘制出的Φ–lgf关系曲线称为对数相频特性。两者合起来，称为对数频率特性。

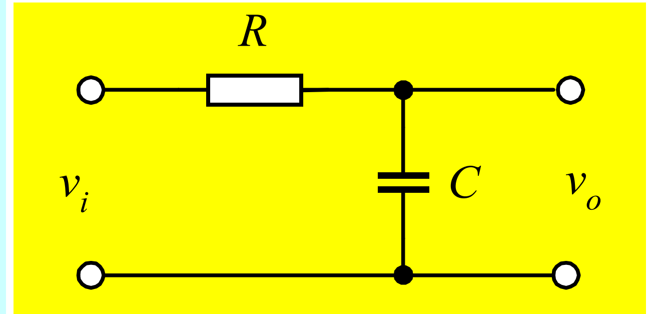
◆波特图的一般画法：

◆画波特图时，分三个频段进行，先画幅频特性，顺序是中频段、低频段和高频段。将三个频段的频率特性(或称频率响应)合起来就是全频段的幅频特性，然后再根据幅频特性画出相应的相频特性来。

➢ 一阶低通网络的对数幅频特性

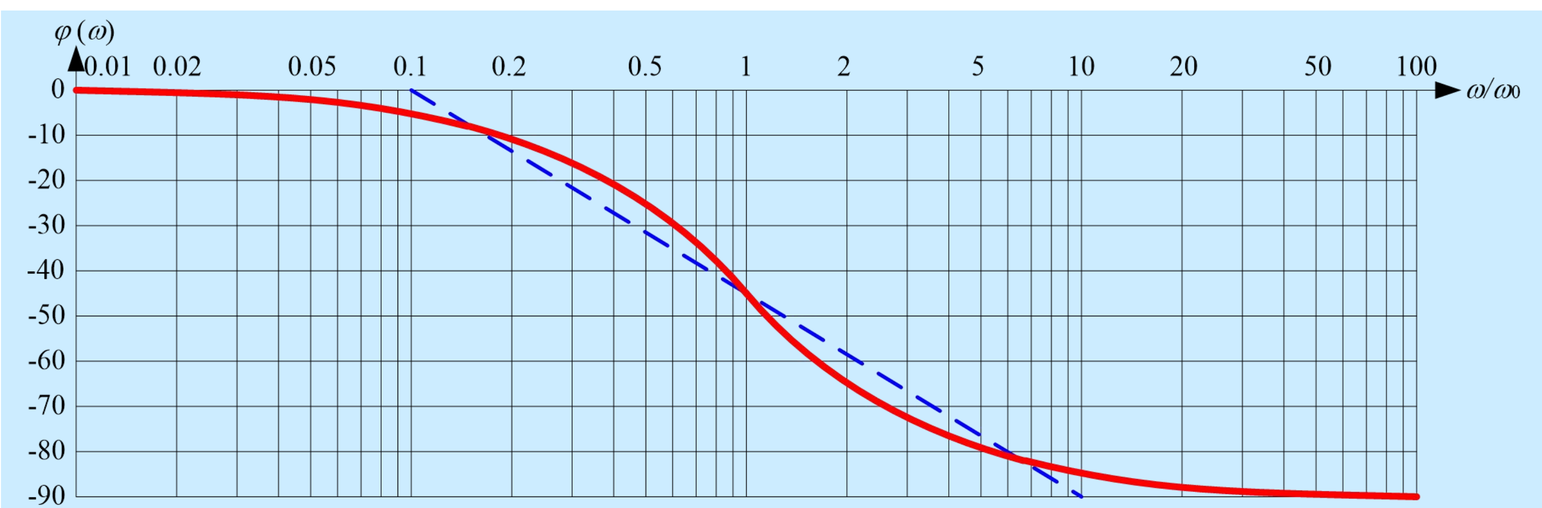
$$A(\omega)=20\lg|H(j\omega)|=-10\lg\left[1+(\frac{\omega}{\omega_0})^2\right]$$





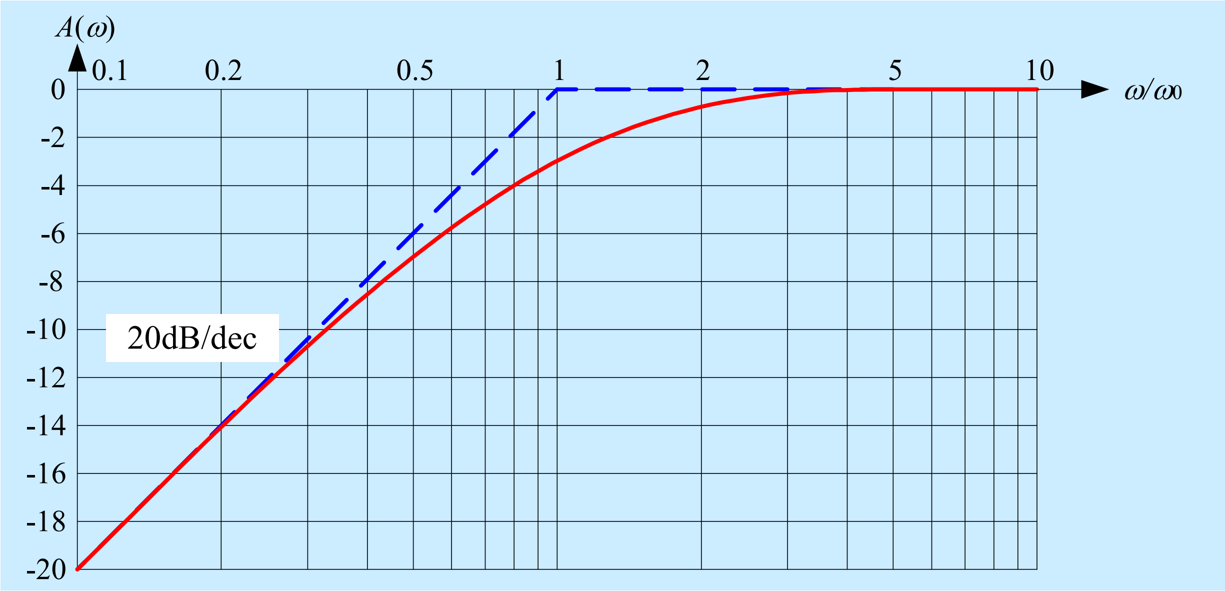
➢ 一阶低通网络的相频特性

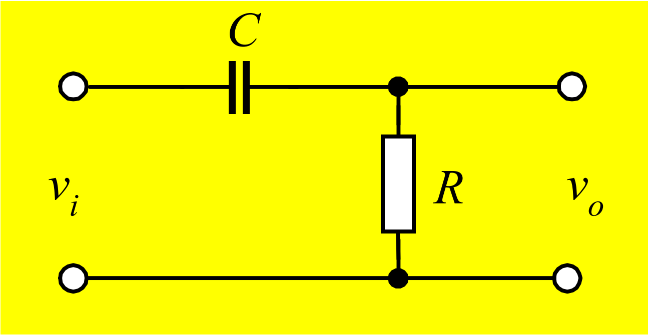
$$\varphi(\omega)=\angle H(j\omega)=-\text{arctg}(\frac{\omega}{\omega_0})$$



➢ 一阶高通网络的频率特性

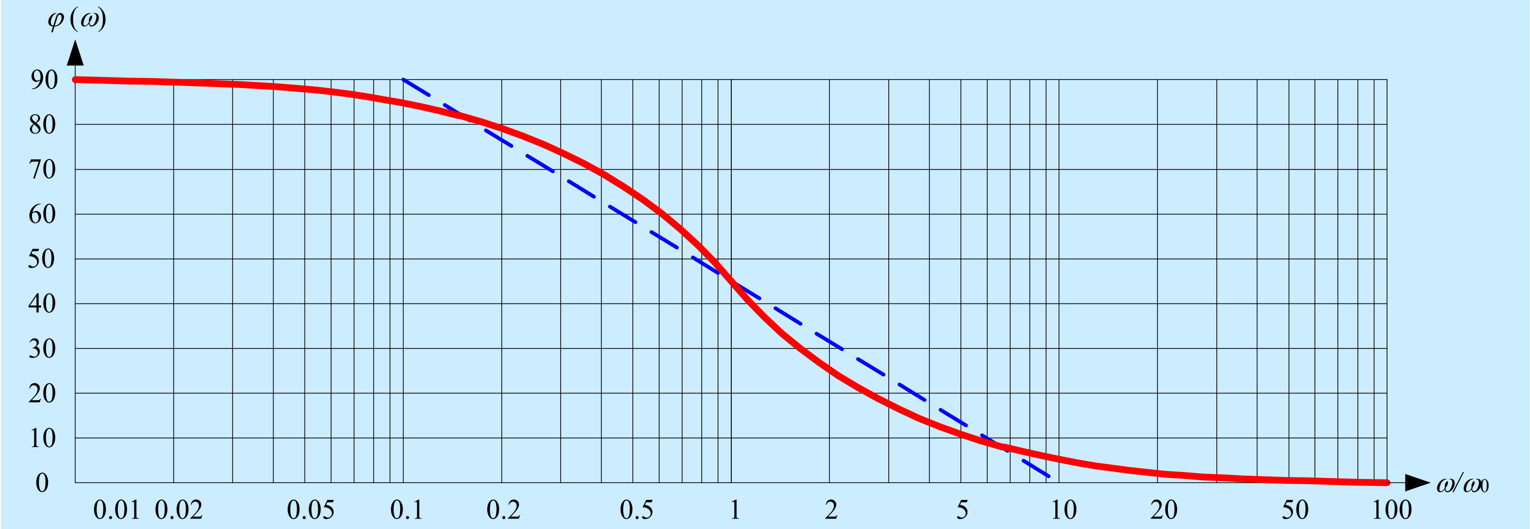
$$A(\omega)=20\lg|H(j\omega)|=20\lg\frac{\omega}{\omega_0}-20\lg\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}$$





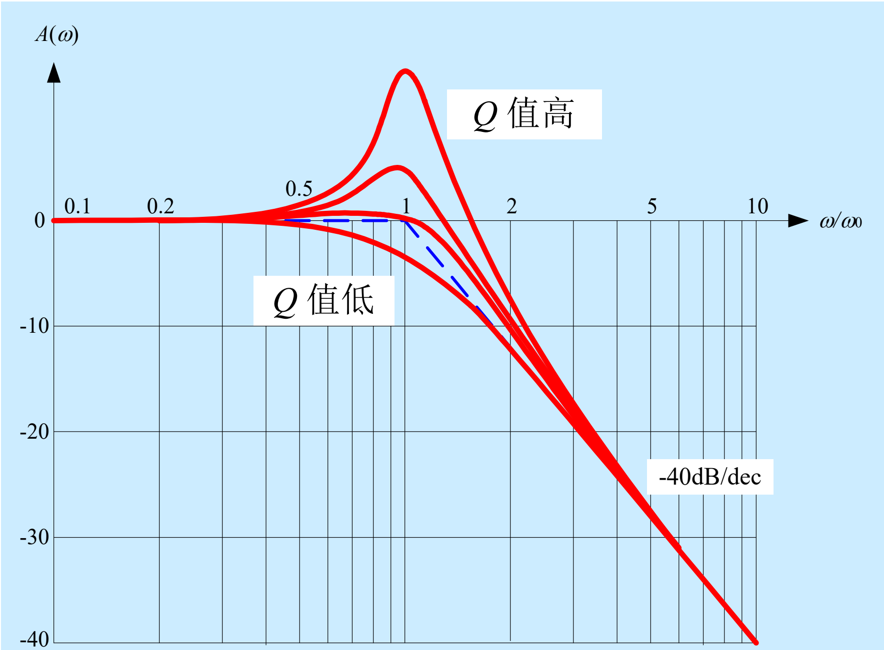
➢ 一阶高通网络的对数幅频特性

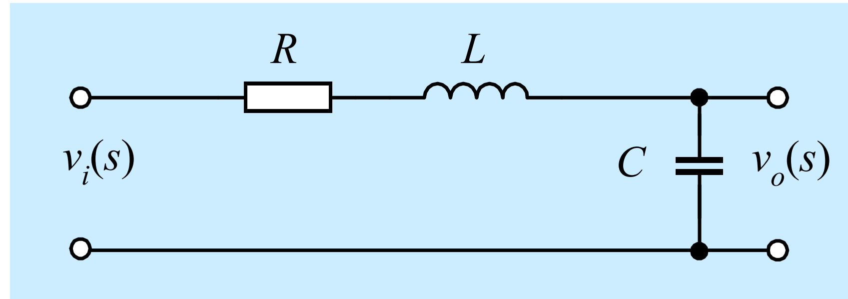
$$\varphi(\omega)=\angle H(j\omega)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}(\frac{\omega}{\omega_0})$$



➢ 二阶网络的对数幅频特性

$$A(\omega) = -20\lg\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}$$





➢ 二阶网络的相频特性

$$\varphi(\omega) = -\arctan\frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$