# 第 5 章　含磁耦合器件的电路

提要　　本节介绍互感元件的特性方程、能量计算及各种等效变换。　此外还包括理想变压器的简单介绍。

## 本章目次

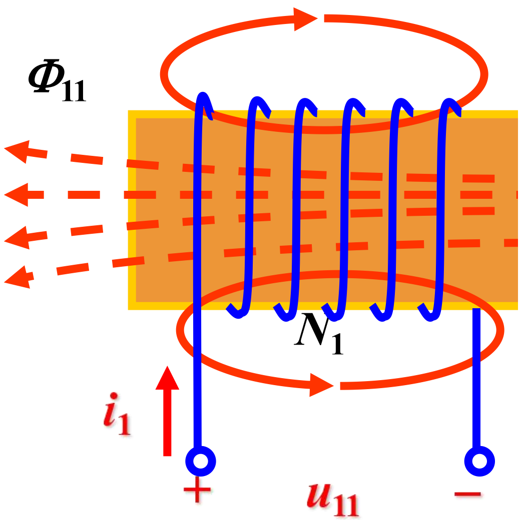
# 5.1 含磁耦合器件的电路

基本要求：透彻理解同名端的概念、熟练掌握互感元件端口方程和互感元件的串并联等效电路。

耦合电感元件属于多端元件，在实际电路中，如收音机、电视机中的中周线圈、振荡线圈，整流电源里使用的变压器等都是耦合电感元件，熟悉这类多端元件的特性，掌握包含这类多端元件的电路问题的分析方法是非常必要的。

## 1、互感的引入

定义$\Psi$：磁链 (*magnetic linkage*)，$\psi=N\phi$




### 1、自感与自感电压

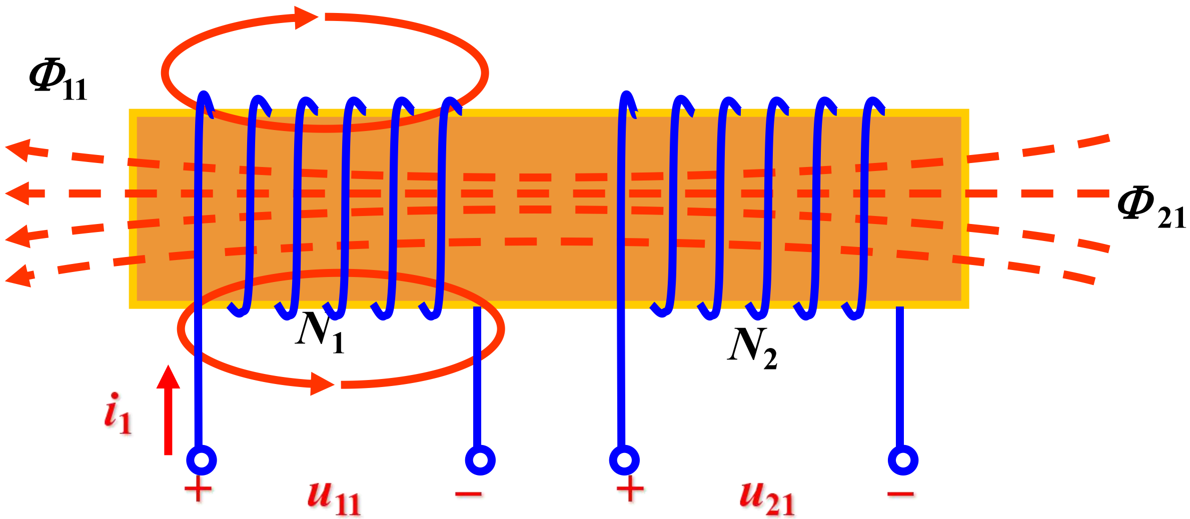
当线圈周围无铁磁物质(空心线圈)时，$\Psi$ 与 $i$ 成正比，有：

$$\psi_1=\psi_{11}=L_1 i_1$$

——$L_1$ 称为自感系数，单位：亨/H。

电磁感应定律：$u_{11}=\dfrac{\mathrm{d}\Psi_{11}}{\mathrm{d}t}=L_1\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$ （$u_{11}$与$i_1$关联）

## 2、互感与互感电压




线圈1中通入电流$i_1$时，在线圈1中产生磁通(*magnetic flux*)，同时，有部分磁通穿过临近线圈2，这部分磁通称为互感磁通$\Phi_{21}$。两线圈间有磁的耦合。

该磁通所在线圈位置

产生磁通的施感电流的线圈位置

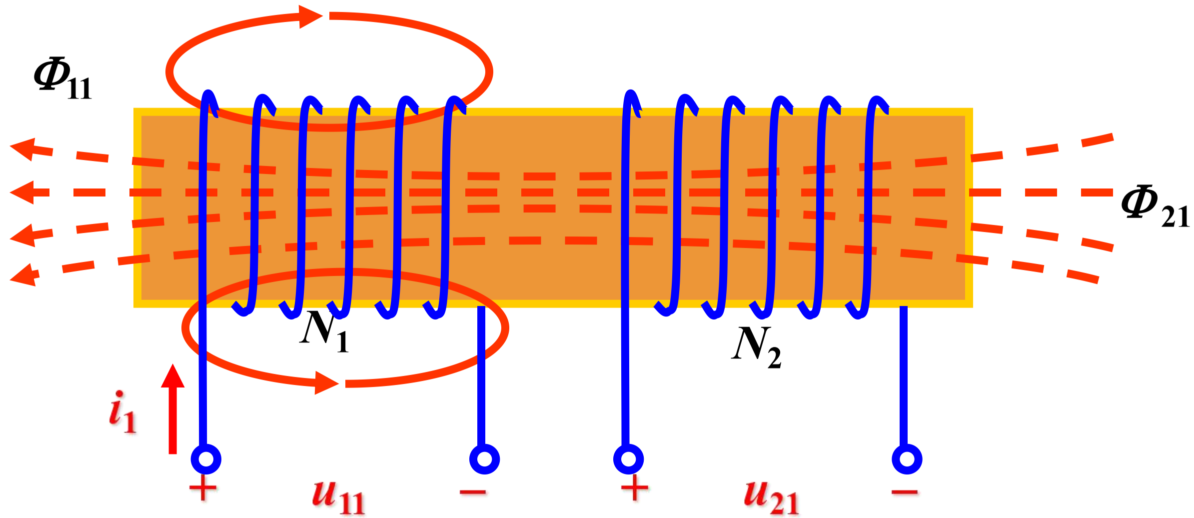
$L_2$中的互感磁链$\Psi_{21}$与$i_1$成正比, 有：

$$\psi_{21} = M_{21} i_1$$ ——$M_{21}$称为互感系数，单位：亨/H。

楞次定理：

$$u_{21} = \frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t} = M_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

（右手螺旋定则）




当两个线圈都有电流时，每一线圈的磁链为自磁链与互磁链的代数和，式中互感磁链前正负号，由自感磁链和互感磁链的方向而定，一致取“ + ”；否则取 “ – ”

$$\psi_1 = \psi_{11} \pm \psi_{12} = L_1 i_1 \pm M_{12} i_2$$

$$\psi_2 = \psi_{22} \pm \psi_{21} = L_2 i_2 \pm M_{21} i_1$$

注意 ① $M$值与线圈的形状、几何位置、空间媒质有关，与线圈中的电流无关，满足$M_{12}=M_{21}$。

② $L$ 总为正值(u, i取关联参考方向下)，$M$ 值有正有负。

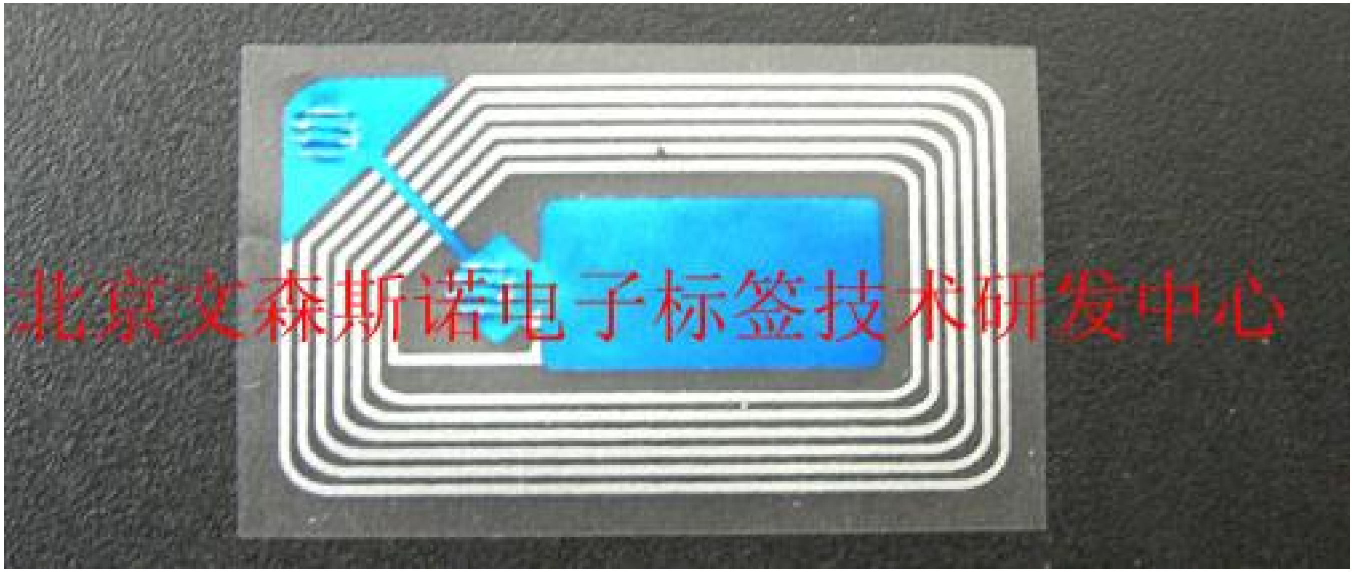
调压器

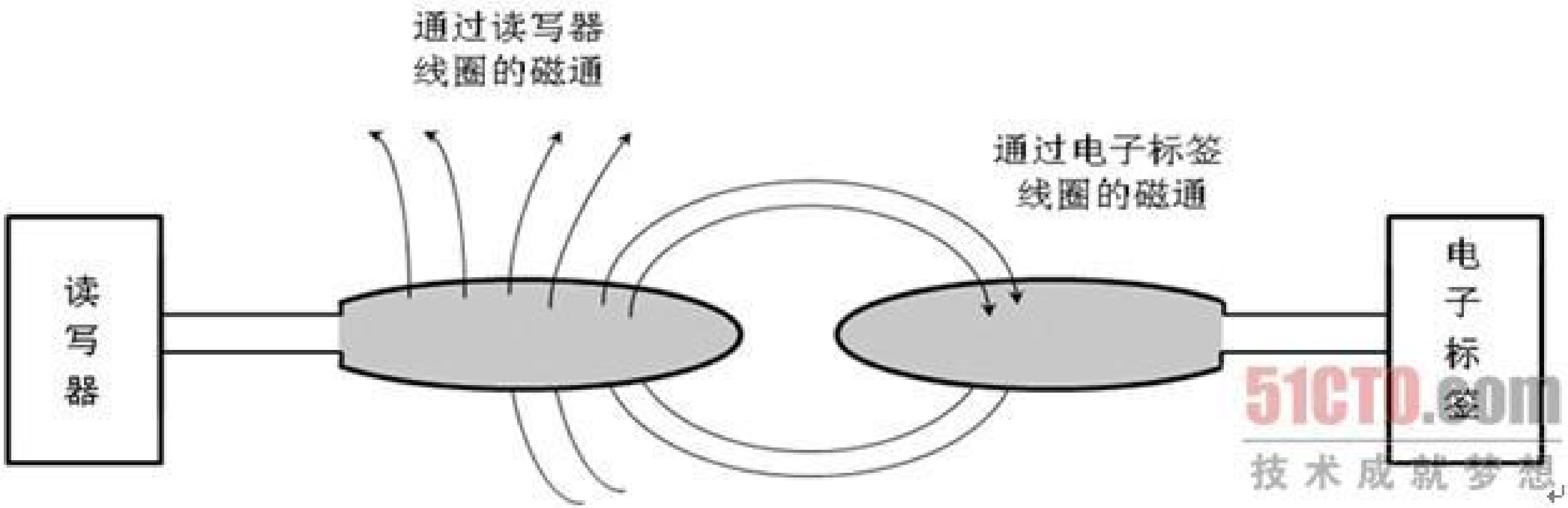
整流器

变压器

电流互感器

小变压器


北京文森斯诺电子标签技术研发中心


通过读写器
线圈的磁通
通过电子标签
线圈的磁通
读
写
器
电
子
标
签
51CTO.com
技术成就梦想

## 3. 同名端：

对于自感电压，由于电压电流为同一线圈上的，只要参考方向确定了，其数学描述便可容易地写出，可不用考虑线圈绕向。

对于互感电压，因产生该电压的电流在另一线圈上，因此，要确定其符号，就必须知道两个线圈的绕向。这在电路分析中显得很不方便。为解决这个问题引入同名端的概念。

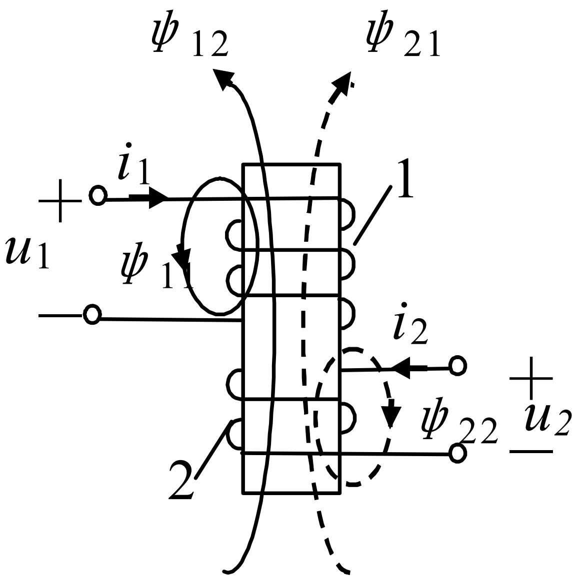



图 5.2a　互感

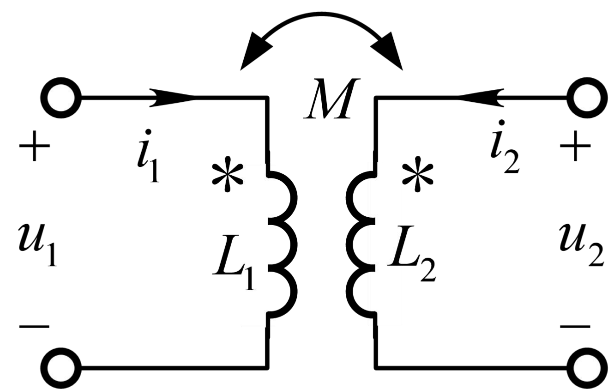


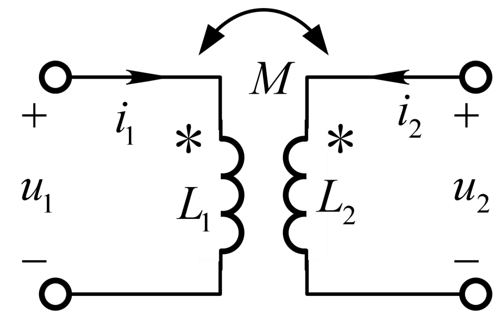

图5.2 b 互感元件的模型

同名端定义为使所激发的自感磁链和互感磁链方向一致的两个线圈电流的进端（或出端）。

换言之，两个端口电流都流进（或流出）同名端，表示它们所激发的自感磁链和互感磁链方向一致，（总磁链在原自感磁链基础上增强）。则互感磁链前应取正号。当两个线圈的电流是从非同名端流入时，它们所激发的自感磁链与互感磁链方向相反，则互感磁链前应取负号。(互感磁链的符号)

## 互感元件的IV特性方程

根据电磁感应定律，在端口电压、电流为关联参考方向时，并且自感磁通与电流符合右手螺旋关系时，互感元件的电压电流方程为



互感元件的符号

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t} = L_{11}\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm L_{12}\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = L_1\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = \dfrac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}t} = \pm L_{21}\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{22}\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \pm M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

若式中 $u_1$、$i_1$ 或 $u_2$、$i_2$ 的参考方向相反，则 $L_1$ 或 $L_2$ 前应添入负号；若$u_1$、$i_2$ 或 $u_2$、 $i_1$ 的参考方向相对星标 * 是相同的，则 $M$ 前取正号，否则应取负号.

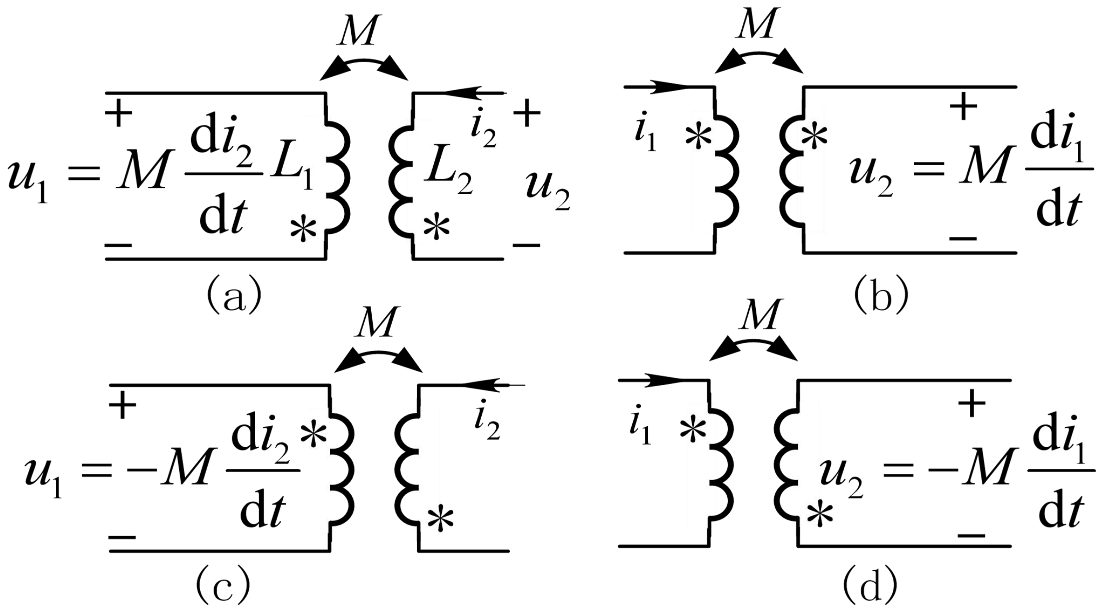
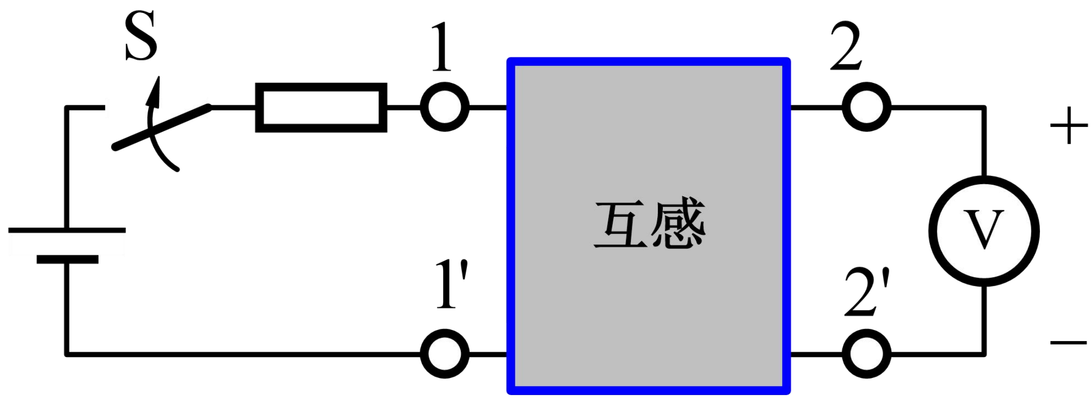



图5. 3　同名端与互感电压的符号关系举例

同名端也可以等价说成：当某线圈电流增加时，流入电流的端子与另一线圈互感电压为正极性的端子为同名端。根据这一原理，在实验中，使某线圈流入递增电流，通过测试另一线圈互感电压的极性便可找出同名端。

# 同名端的实验测定：



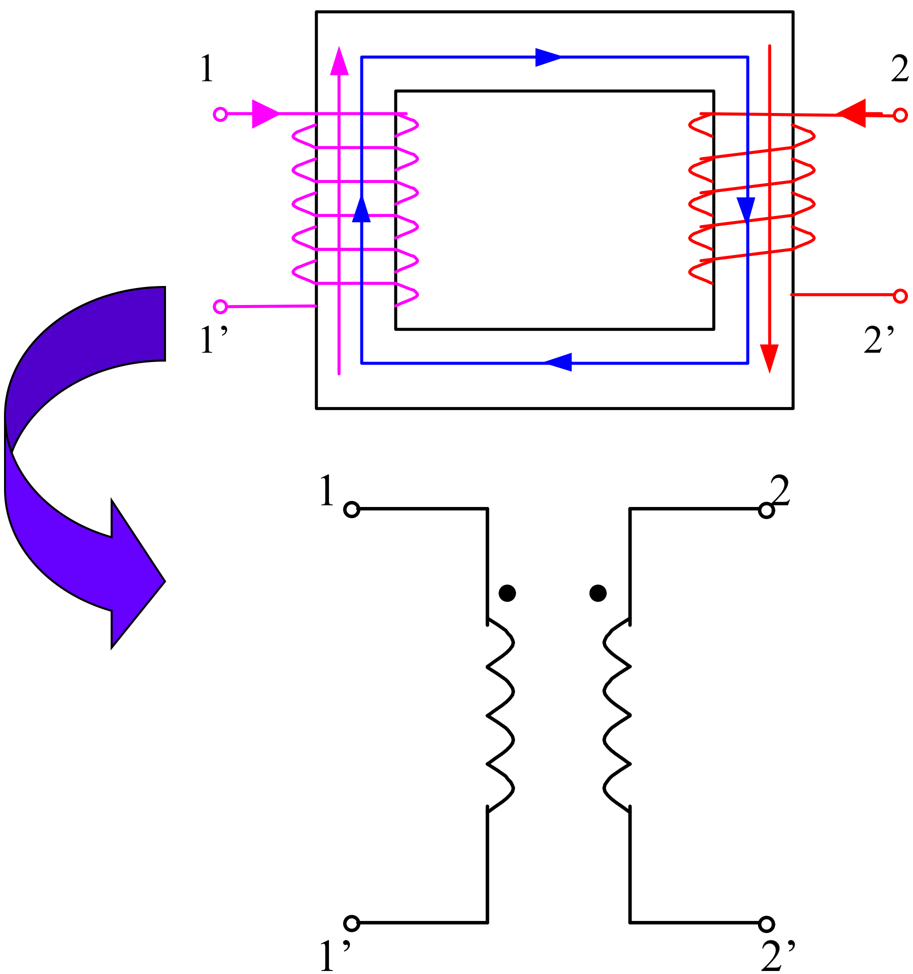

如图电路，当闭合开关S 时，电流增加，

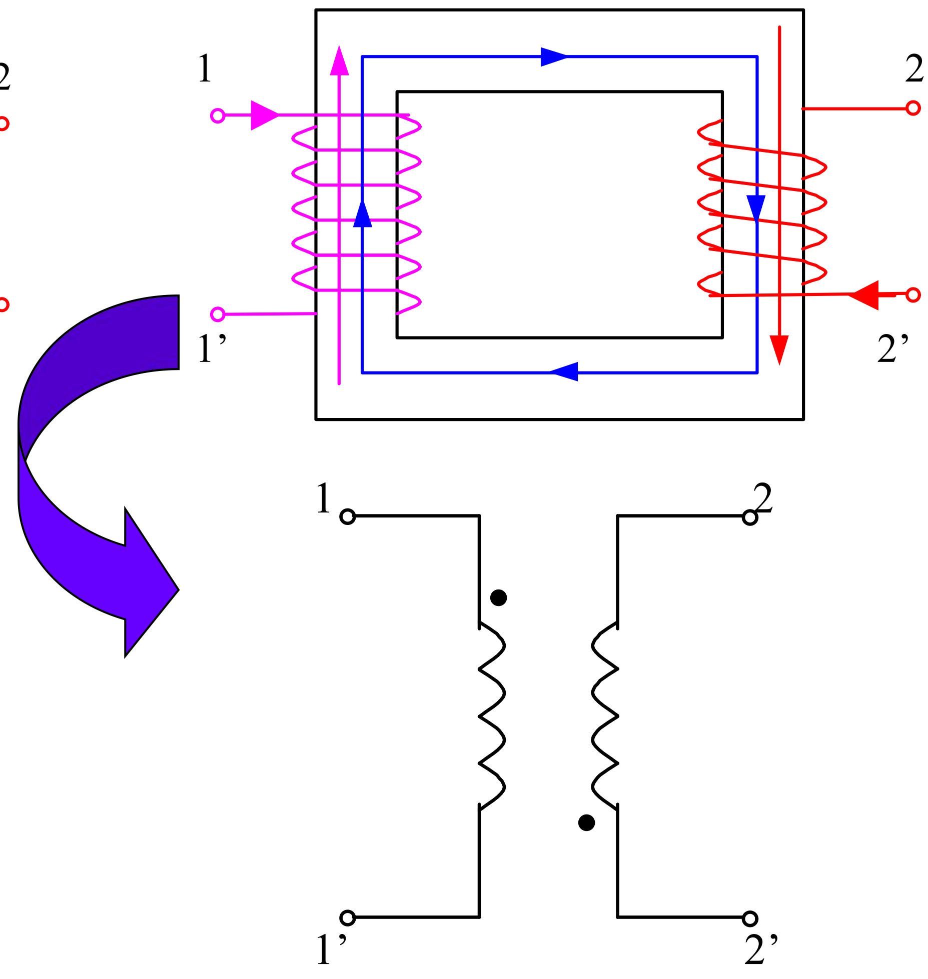
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} > 0, \qquad u_{22'} = M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} > 0$$ 电压表正偏。

当两组线圈装在黑盒里，只引出四个端线组，要确定其同名端，就可以利用上面的结论来加以判断。

# 同名端示意图：

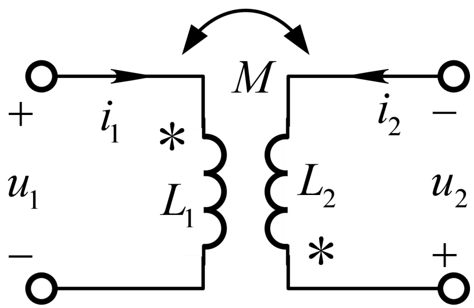
**注 意** 线圈的同名端必须两两确定；



例题 补充

列出图示两个互感元件的特性方程




（a）

$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

分析

1）从图(a)知，端口 1 的电压和电流为关联参考方向，自感电压 $u_{11}$ 前为 正，

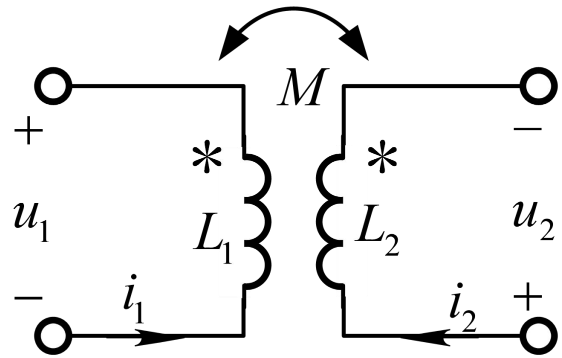
2）引起互感电压 $u_{12}$ 的电流 $i_2$ 参考方向是从所在端口2的非 * 指向 * 端，与引起 $u_{11}$ 的电流 $i_1$ 从自端口 * 端指向非 * 端方向相反，因此 $u_{12}$ 前取 负；

3）端口 2 的电压和电流为非关联参考方向,自感电压 $u_{22}$ 前为 负;

4）引起互感电压 $u_{21}$ 的电流 $i_1$ 参考方向是从端口1的 * 指向非 * 端，相对与端口2来说与 $u_2$ 的参考方向关联一致，故 $u_{21}$ 前取 正。

故图（a）所示的互感元件特性方程为:

实用上，上述列写互感方程的方法称为逐项判断法。



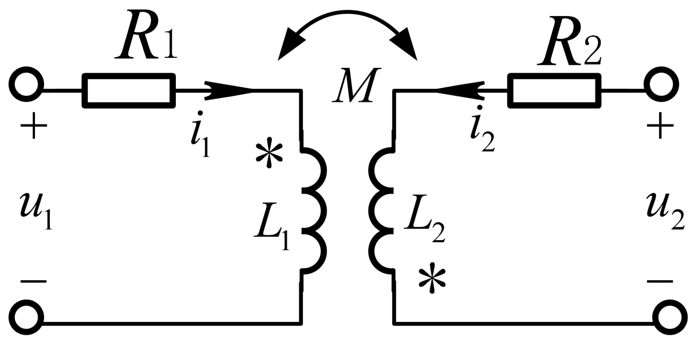

（b）

基于相似解释，图（b）所示互感元件的特性方程。

$$u_1 = -L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

**一个实际耦合电感**，例如空心变压器(一种绕在非铁磁材料上的变压器)，一般需要考虑绕组电阻，此时可用带有串联等效电阻的互感来表示其电路模型，如下图所示。



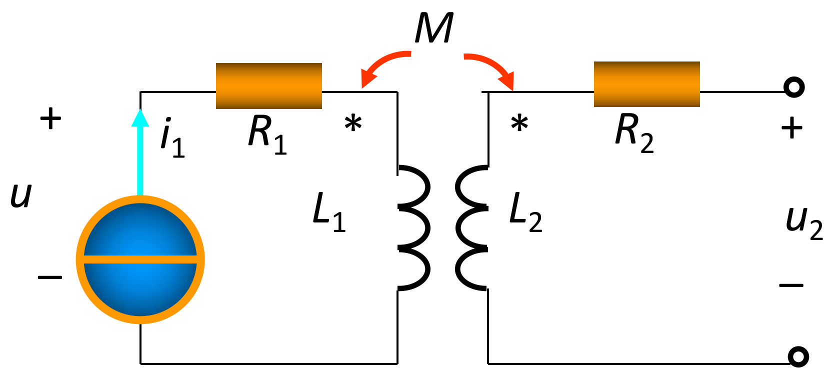

变压器电路模型

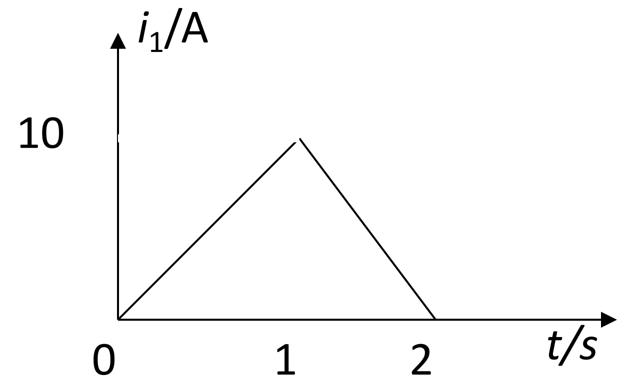
图中$u_1$与$i_2$参考方向相对星标*是相反的，$u_2$与$i_1$也是相反的，故$M$前均应取负号，端口特性方程将是：

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = R_2 i_2 - M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

例题 补充

已知$R_1=10\Omega, L_1=5H, L_2=2H, M=1H$，求$u(t)$和$u_2(t)$




解

$$u_2(t)=M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}10\mathrm{V} & 0\le t\le 1\mathrm{s}\\ -10\mathrm{V} & 1\le t\le 2\mathrm{s}\\ 0 & 2\le t\end{cases}$$

$$i_1=\begin{cases}10t & 0\le t\le 1\mathrm{s}\\ 20-10t & 1\le t\le 2\mathrm{s}\\ 0 & 2\le t\end{cases}$$

$$u(t)=R_1 i_1+L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}100\,t+50\mathrm{V} & 0\le t\le 1\mathrm{s}\\ -100\,t+150\mathrm{V} & 1\le t\le 2\mathrm{s}\\ 0 & 2\le t\end{cases}$$

## 4、耦合系数：

耦合系数（$k$）：定量地描述两个耦合线圈的紧疏程度。

$$k \stackrel{def}{=} \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

当 $k$=1 称全耦合：漏磁 $\Phi_{s1}=\Phi_{s2}=0$，　即 $\Phi_{11}=\Phi_{21}$，$\Phi_{22}=\Phi_{12}$

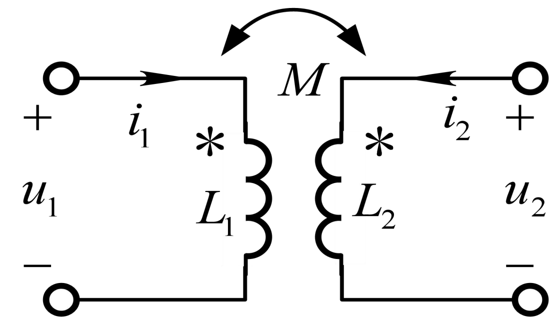
当 $k$=0 称无耦合

一般有：

$$k=\frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}=\sqrt{\frac{M^2}{L_1 L_2}}=\sqrt{\frac{(Mi_1)(Mi_2)}{L_1 i_1 L_2 i_2}}=\sqrt{\frac{\psi_{21}\psi_{12}}{\psi_{11}\psi_{22}}}\le 1$$

耦合系数$k$的大小与两个线圈的结构、相互位置以及周围磁介质有关。

## 5、互感总功率：




在关联参考方向下

$$P = u_1 i_1 + u_2 i_2$$

$$= [L_1(\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t) \pm M(\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t)]i_1 + [\pm M(\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t) + L_2(\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t)]i_2$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}L_1 i_1^2) \pm \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M i_1 i_2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}L_2 i_2^2)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 \pm M i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2) = \frac{\mathrm{d}w_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$$

正如一端口电感那样，输入互感的总能量将全部转化为磁场能量，磁能

$$w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2 \qquad w_{\mathrm{m}} \geq 0$$

如果没有磁耦合，***M*=0**，磁能就是两个自感元件分别储能之和。存在磁耦合时，要增减一项$\boldsymbol{M i_1 i_2}$，增与减要视互感的作用是使磁场增强还是使磁场减弱而定。

# 5.2 互感元件的等效化简

基本要求：熟练掌握互感元件的串并联等效电路。

## 1 互感元件的串联

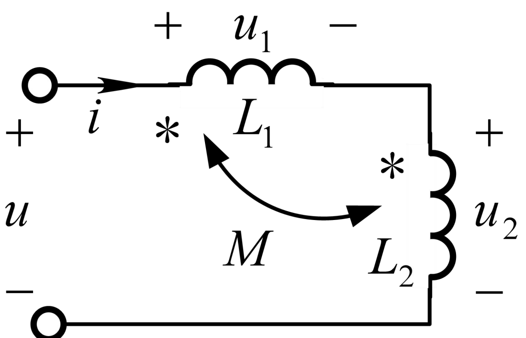



图5.3 a

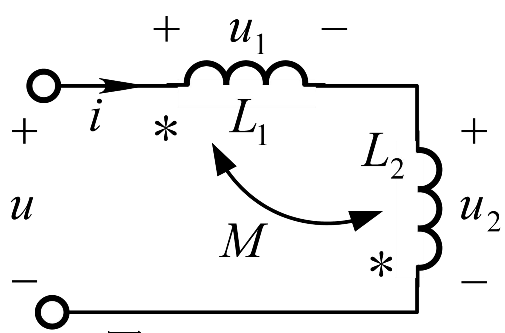



图5.3 b

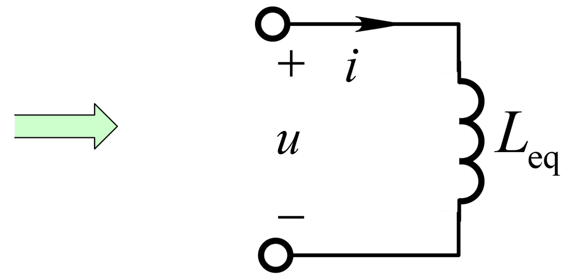



图5.3 c

电流从同名端流入

→正串(或顺接)

电流从异名端流入

→反串(或反接)

$$u = u_1 + u_2 = (L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \pm M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}) + (\pm M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}) = (L_1 + L_2 \pm 2M)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L_{eq}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

由此可得串联等效电感如图5.3c所示，为 $L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M$

注：正串2*M*前取正,等效电感大于两自感之和;反串2*M*前取负，等效电感小于两自感之和

## 2 互感元件的并联

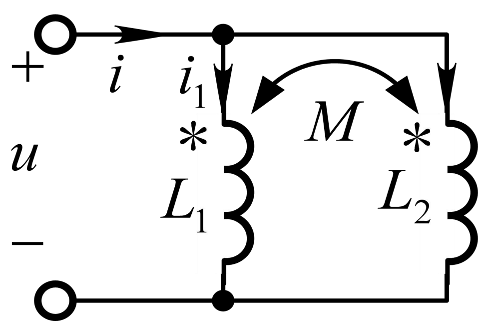



图5. 4(a) 互感两同名端并联电路

图5.4(a)表示两个同名端相接。为求其等效电路，分别列KCL和KVL方程：

$$u = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \qquad (1)$$

$$u = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \qquad (2)$$

$$i = i_1 + i_2 \qquad (3)$$

（3）代入（1）得：

$$u = M \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + (L_1 - M)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = L_a \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_b \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

（3）代（2）得：

$$u = M \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + (L_2 - M)\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = L_a \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_c \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

由此消去互感的等效电路如图5. 4(b)

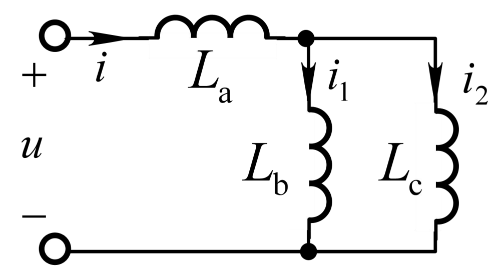
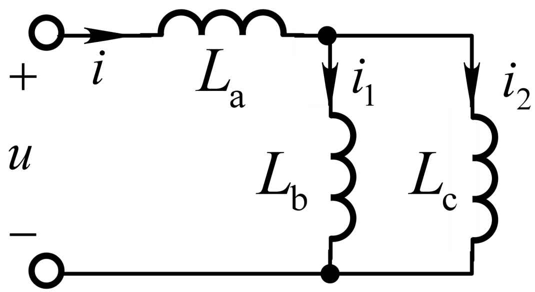



图5. 4(b)

图中各等效电感为
$$\left.\begin{aligned} L_a &= M \\ L_b &= L_1 - M \\ L_c &= L_2 - M \end{aligned}\right\}$$

如无需计算电流 $i_1$、$i_2$，根据电感的串、并联等效，图**5.4 (b)**可进一步等效成一个电感，如图**5.4(c)**，



(b)

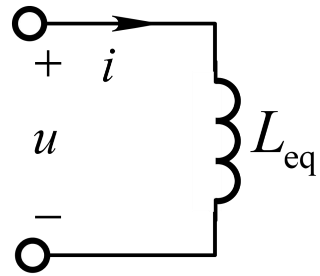


图5.4(c)

等效电感

$$L_{eq}=L_a+\frac{L_bL_c}{L_b+L_c}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$$

同理，异名端联接时的总等效电感为

$$L'=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2+2M}$$

对于实际的耦合线圈，无论何种串联或何种并联，其等效电感均为正值。所以自感和互感满足如下关系：

$$M\le\sqrt{L_1L_2}$$

耦合系数满足 $$k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}\le 1$$

# 3 互感线圈的T型联接

**如图5.5(a)所示，图5.5(b)是不含磁耦合的等效电路**

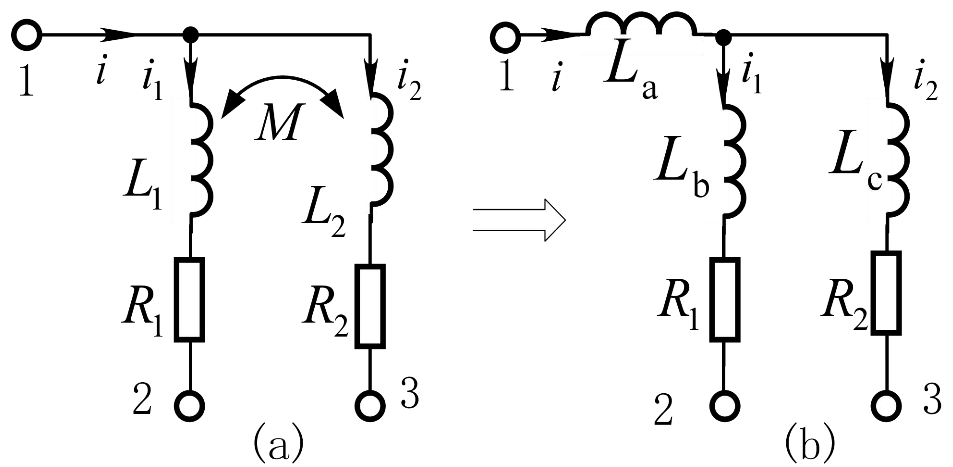



图5.5 互感的T型等效电路

由于耦合线圈含有电阻，在较接近实际的电路模型中两自感都含有串联电阻。

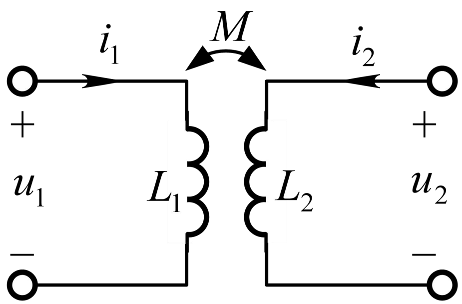
**图5.5(b)中各等效电感为**

$$\left.\begin{aligned} L_a &= M \\ L_b &= L_1 - M \\ L_c &= L_2 - M \end{aligned}\right\}$$

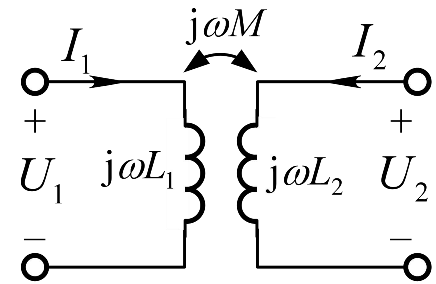
其等效电感的计算与前式相同。就是说，即便模型中含有串联电阻,也可以通过这种方法来消除互感，得到无互感等效电路。

基本要求：掌握互感元件方程的相量形式及其应用，会用支路电流法或回路电流法列写含互感电路的方程，掌握含互感电路的等效化简。

## 1 互感元件的相量模型




(a)




(b)

图5.7 互感元件的电路模型

微分方程

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 &= \pm M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\}$$

相量变换微分规则

$$\left.\begin{aligned} \dot U_1 &= \mathrm{j}\omega L_1\dot I_1 \pm \mathrm{j}\omega M\dot I_2 \\ \dot U_2 &= \pm\mathrm{j}\omega M\dot I_1 + \mathrm{j}\omega L_2\dot I_2 \end{aligned}\right\}$$

相量电路模型

说明：由于互感元件方程宜表达成电压是电流的函数，故对含互感的电路宜选用以电流为变量的分析方法，例如支路电流法和回路电流法。

## 2 含互感元件电路方程的列写

**例题 5.1**

列出图5.8所示电路的方程。

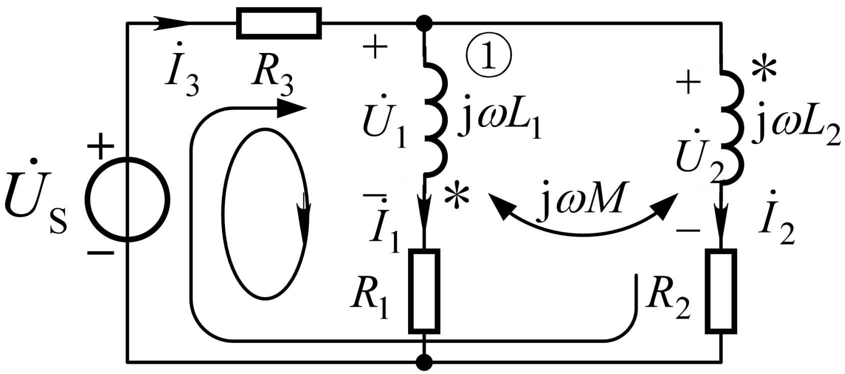



图5.8

**解**

用支路电流法。对独立节点①和两个独立回路(取左边的网孔和外网孔)列写KCL和KVL方程如下：

$$\dot{I}_1+\dot{I}_2-\dot{I}_3=0 \qquad (1)$$

$$R_1\dot{I}_1+\dot{U}_1+R_3\dot{I}_3=\dot{U}_S \qquad (2)$$

$$R_2\dot{I}_2+\dot{U}_2+R_3\dot{I}_3=\dot{U}_S \qquad (3)$$

式中 $\dot{U}_1$、$\dot{U}_2$ 为互感端口电压，根据式

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1&=\mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_2\\ \dot{U}_2&=-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1+\mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2\end{aligned}\right\}$$

代入(2)、(3)消去 $\dot{U}_1$、$\dot{U}_2$ 得

$$(R_1+\mathrm{j}\omega L_1)\dot{I}_1-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_2+R_3\dot{I}_3=\dot{U}_S \qquad (4)$$

$$-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1+(R_2+\mathrm{j}\omega L_2)\dot{I}_2+R_3\dot{I}_3=\dot{U}_S \qquad (5)$$

方程(1)、(4)、(5)联立便可得解。

例题 **5.2**

列出图5.9所示电路的回路电流方程。

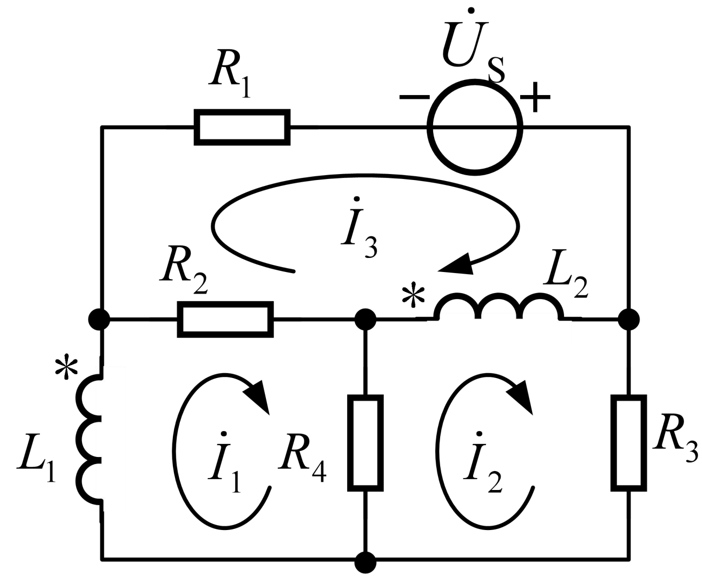



图5.9

解 回路1 $(R_2+R_4+j\omega L_1)\dot I_1-(R_4+j\omega M)\dot I_2-(R_2-j\omega M)\dot I_3=0$ (1)

回路2 $-(R_4+j\omega M)\dot I_1+(R_3+R_4+j\omega L_2)\dot I_2-j\omega L_2\dot I_3=0$

回路3 $-(R_2-j\omega M)\dot I_1-j\omega L_2\dot I_2+(R_1+R_2+j\omega L_2)\dot I_3=\dot U_S$

**方程(1)中$-j\omega M\dot I_2$和$j\omega M\dot I_3$分别为回路电流$\dot I_2$、$\dot I_3$通过互感在回路1中产生的电压。**

# 3 含互感电路的等效化简

两个彼此耦合的线圈相串联或存在公共节点时，可消去互感，化简成无互感电路，再进行分析。

**例题** **5.3**

（应用串联等效化简含源一端口）电路如下图所示，已知$R=20\Omega$，$L_1=0.1H$，$L_2=0.4H$，耦合系数$k=0.85$，$i=3\sqrt{2}cos(100t)A$。求此一端口的戴维南等效电路。

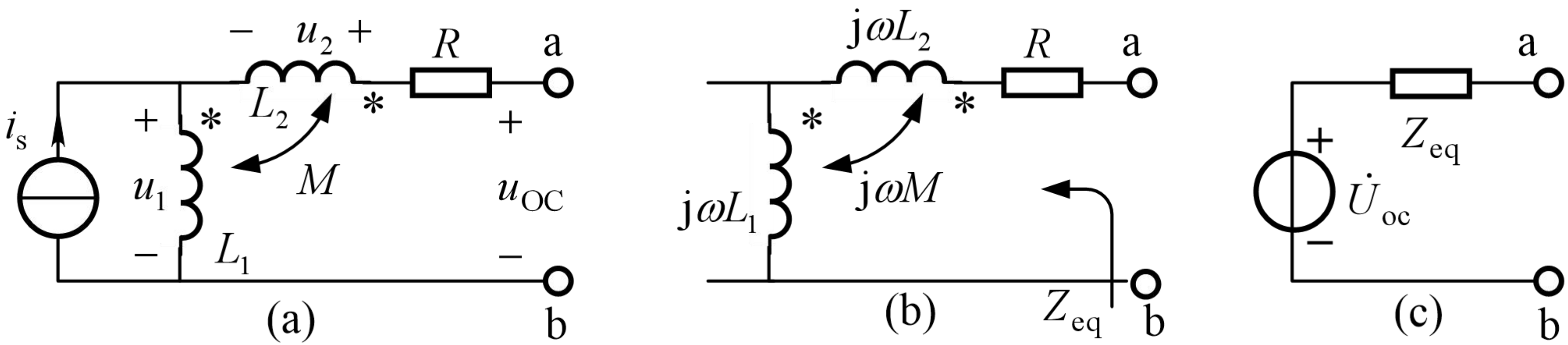
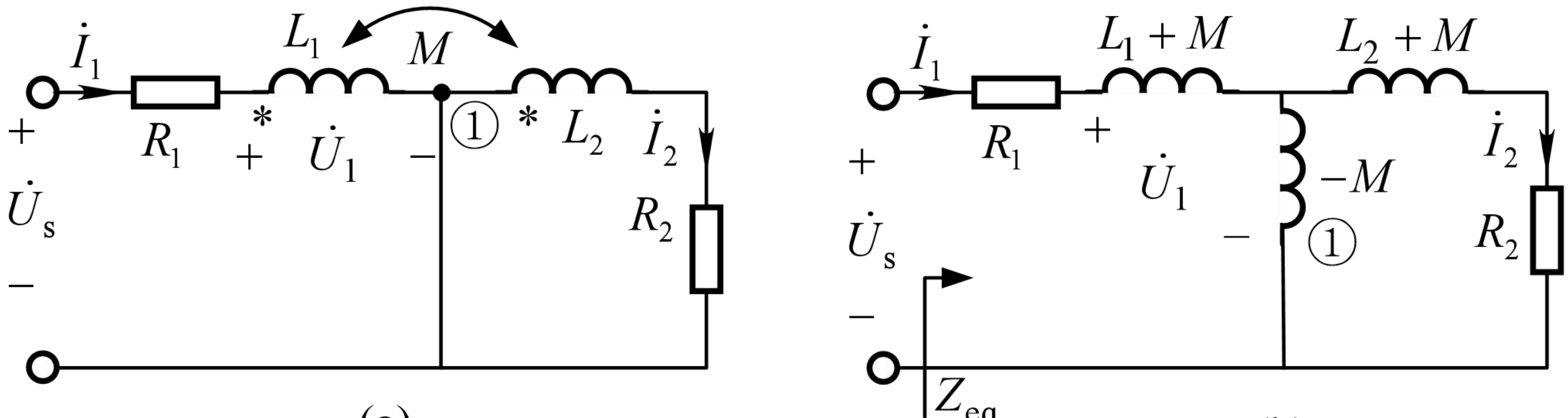



图5.3.3 （a）例题5.3； （b）计算等效阻抗； （c）戴维南等效电路

## 例题 5.4

（存在公共节点时消去互感）已知下图中$U_s=20\angle 0^\circ\ V$，$R_1=2\Omega$，$R_2=4\Omega$，$\omega L_1=2\Omega$，$\omega L_2=4\Omega$，$\omega M=1\Omega$。求电流$\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$。




(a) (b)

**解：**

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_s}{R_1+j\omega(L_1+M)+\dfrac{-j\omega M[R_2+j\omega(L_2+M)]}{-j\omega M+R_2+j\omega(L_2+M)}}\approx 7.06\angle-41.42^\circ\ A$$

由分流公式可得：

$$\dot{I}_2=\frac{-j\omega M}{-j\omega M+j\omega(L_2+M)+R_2}\times\dot{I}_1\approx 1.25\angle-176.4^\circ\ A$$

# 4 互感的阻抗变换作用

（1）互感在电路中常用于电能或电信号的传输和变换，其电路结构如图5.10(a)所示，此时可将副边线圈所在的电路等效到原边

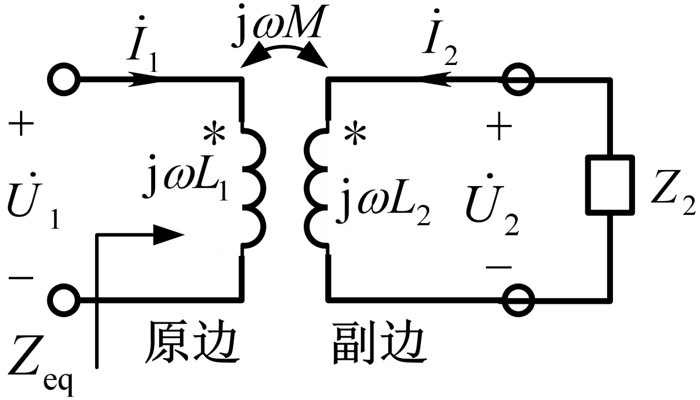


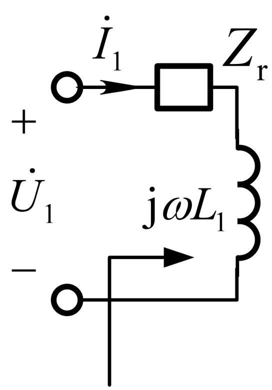

图5.10 ( a )

当从原边看进去时，相当于无源一端口网络，可用阻抗来等效。对互感原边和副边所在回路分别列写KVL方程得

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2 &= \dot{U}_1 \\ \mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2 + Z_2\dot{I}_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

等效电路如图5.10（b）所示

即求得从原边看进去的等效阻抗为




5. 10(b)

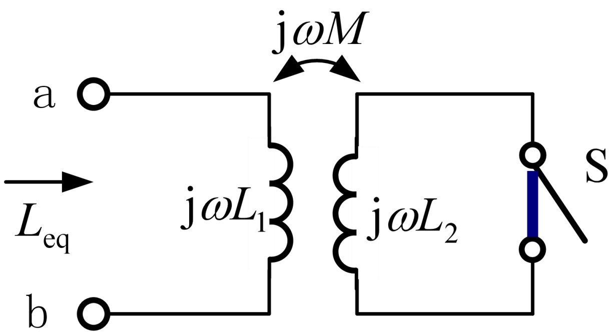
$$Z_{eq} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + \mathrm{j}\omega L_2} + \mathrm{j}\omega L_1 = Z_r + \mathrm{j}\omega L_1$$

$$\text{其中 } Z_r = \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + \mathrm{j}\omega L_2} = \frac{(\omega M)^2}{\text{副边回路总阻抗}} = R_r + \mathrm{j}X_r$$

表示副边回路阻抗对等效阻抗的影响，称为副边对原边的引入阻抗，其实部和虚部分别称为引入电阻和引入电抗。

例题 **5.5**

(应用原边等效电路) 下图所示为耦合系数测试电路。设开关S分别处于断开和接通位置时，用LCR表(一种测量二端电感、电容、电阻参数的仪器)测得a,b端等效电感为$L_{OC}$=0.8H，$L_{SC}$=0.1H。试根据上述结果计算互感的耦合系数。




解 开关断开时，原边电感就是此时的等效电感,即

$$L_{OC} = L_1 \qquad (1)$$

当开关接通时，输入端口等效阻抗

$$Z_{eq} = j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{Z + j\omega L_2} = j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2}$$

$$= j\omega\left(\frac{L_1L_2 - M^2}{L_2}\right) = j\omega L_{SC}$$

得等效电感 $L_{SC} = \dfrac{L_1L_2 - M^2}{L_2} \qquad (2)$

将 $M = k\sqrt{L_1L_2}$ 及式(1)代入式(2)得

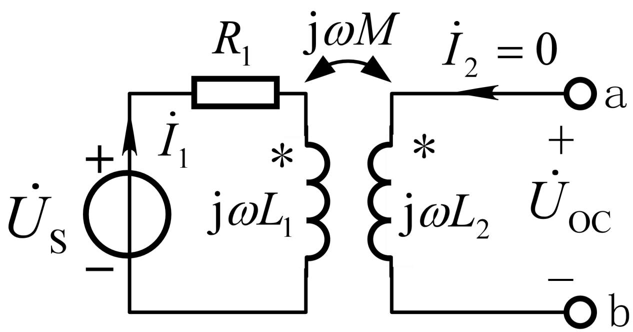
$$k = \sqrt{1 - L_{SC}/L_{OC}}$$

$$= \sqrt{1 - 0.1/0.8} \approx 0.935$$

(2) 当互感线圈的原边接电源，则从副边看进去时相当于含独立源一端口网络，可用戴维南电路或诺顿电路来等效。

**例题 5.6**

求图 (a)电路的戴维南等效电路。

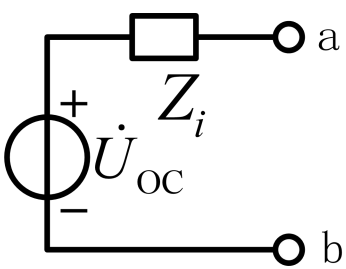



(a)

**解** 当副边开路时，端口方程简化为

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_S &= R_1\dot{I}_1 + j\omega L_1\dot{I}_1 \\ \dot{U}_{OC} &= j\omega M\dot{I}_1 \end{aligned}\right\}$$

解得 $\dot{U}_{OC} = \dfrac{j\omega M}{R_1 + j\omega L_1}\dot{U}_S$




(b)

计算戴维南等效阻抗，根据公式，于是

$$Z_i = Z'_r + j\omega L_2 = \frac{(\omega M)^2}{\text{原边回路总阻抗}} + j\omega L_2 = \frac{(\omega M)^2}{R_1 + j\omega L_1} + j\omega L_2$$

等效戴维南电路如图（b）

# 5.4 电磁变压器

基本要求：熟练掌握理想变压器特性方程，理解实际变压器与理想变压器的关系、理想变压器的电阻变换作用。

理想变压器是实际电磁耦合元件的一种理想化模型，如图 5.11 和 5.12。

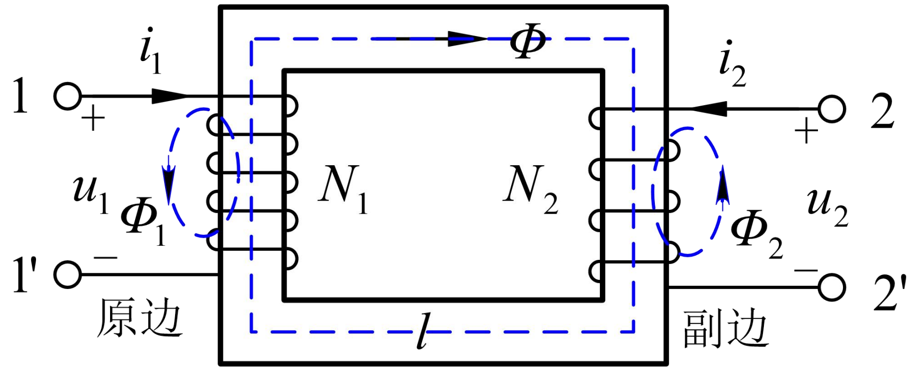



图5. 11 变压器示意图

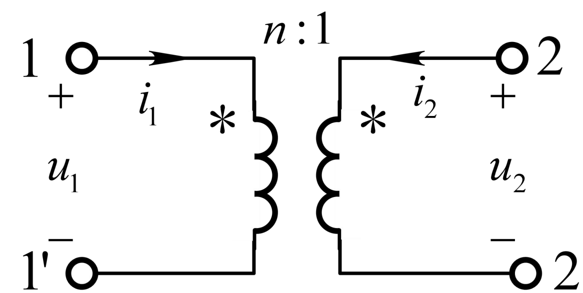



图5. 12 理想变压器的符号

**理想化认为**

**相应有**

1) 铁心的磁导率 $\mu \to \infty$，因而铁芯内磁场强度H=0

2)每个线圈的漏磁通为零,即两个线圈为全耦合

$$\Psi_1 = N_1\Phi,\ \Psi_2 = N_2\Phi$$

3)线圈电阻为零, 端口电压等于感应电动势 →

$$u_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = N_1\frac{d\Phi}{dt},\quad u_2 = \frac{d\Psi_2}{dt} = N_2\frac{d\Phi}{dt}$$

4)铁心的损耗为零，即铁心内不存在涡流 →

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$$

安培环路定律

由此得到图5.12理想变压器的端口方程：

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n \text{ 或 } u_1 = n u_2\ ;\quad \frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} = -\frac{1}{n} \text{ 或 } i_1 = (-1/n) i_2$$

变比（匝数比）

$$\frac{u_1}{u_2}=\frac{N_1}{N_2}=n \text{ 或 } u_1=nu_2 \qquad \frac{i_1}{i_2}=-\frac{N_2}{N_1}=-\frac{1}{n} \text{ 或 } i_1=(-1/n)i_2$$

理想变压器方程与 ***u***、***i*** 的参考方向和两线圈同名端位置有关，**图 5.13 给出了一些同名端与理想变压器端口方程的关系示例。**

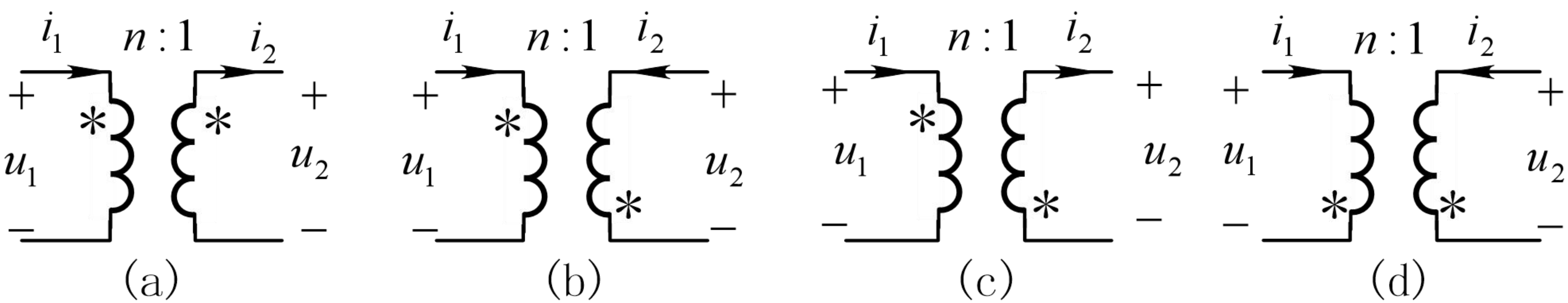



**图5.13　同名端与理想变压器端口方程的关系示例**

**对应的特性方程分别为(注意符号)**

$$\begin{cases} u_1=nu_2 \\ i_1=\dfrac{1}{n}i_2 \end{cases}$$
(a)

$$\begin{cases} u_1=-nu_2 \\ i_1=\dfrac{1}{n}i_2 \end{cases}$$
(b)

$$\begin{cases} u_1=-nu_2 \\ i_1=-\dfrac{1}{n}i_2 \end{cases}$$
(c)

$$\begin{cases} u_1=nu_2 \\ i_1=-\dfrac{1}{n}i_2 \end{cases}$$
(d)

理想变压器输入的总功率为

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = (nu_2)(-\frac{i_2}{n}) + u_2 i_2 = -u_2 i_2 + u_2 i_2 = 0$$

说明变压器元件不仅是无源的，而且每一瞬间输入功率等于输出功率，即传输过程中既无能量的损耗，也无能量的存储，属于非能元件。

在实际中变压器不但可以变压、变流，还可用于变换电阻。图**5.14(a)**所示电路中

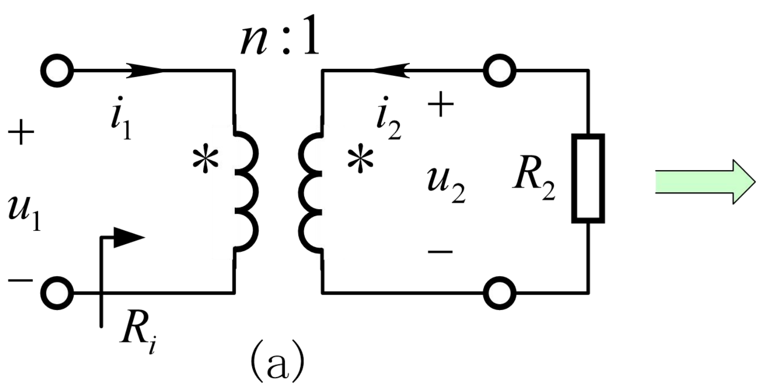


图5. 14（a） 理想变压器的电阻变换作用

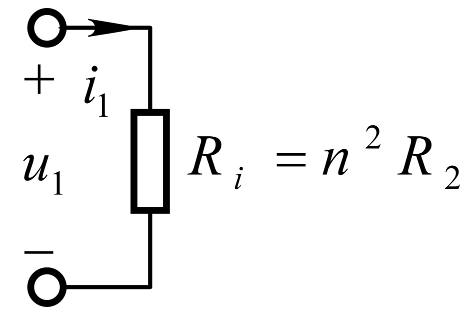


图5. 14(b)

变压器输入端口等效电阻为

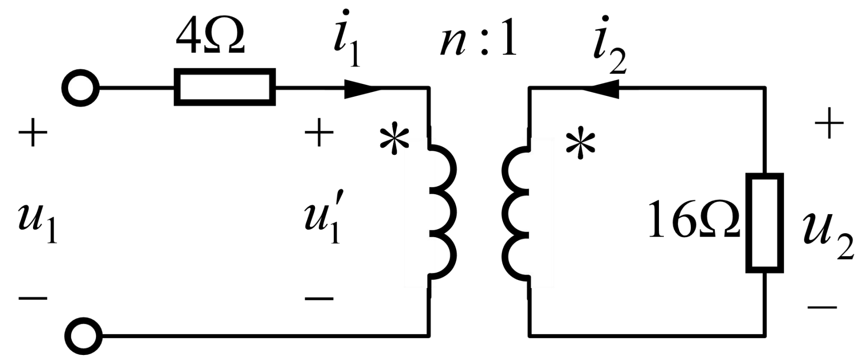
$$R_i = \frac{u_1}{i_1} = \frac{nu_2}{-i_2/n} = n^2 R_2$$

亦即当理想变压器输出端口接电阻 $R_2$ 时，折算到输入端口的等效电阻为 $n^2 R_2$

如图**5.14(b)**所示。

例题 补充

**图示电路中，要求 $u_2 = u_1$，变比$n$应为多少？**




解 由变压器特性方程可知

$$\begin{cases} u_1' = nu_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n} i_2 = -\dfrac{1}{n} \times \left(-\dfrac{u_2}{16}\right) \end{cases} \quad (1)$$

对左回路应用KVL方程

$$u_1 = 4i_1 + u_1' = 4i_1 + nu_2 \quad (2)$$

将式(1)代入式(2)，考虑到 $u_2 = u_1$ 可得

$$u_1 = \left(\frac{1}{4n} + n\right)u_2 = \left(\frac{1}{4n} + n\right)u_1$$

$$\frac{1}{4n} + n = 1$$

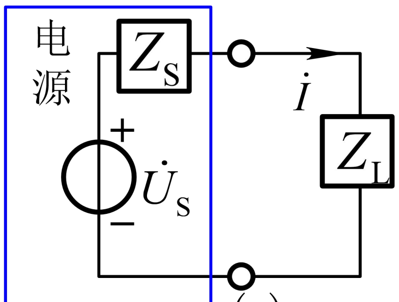
解得 $n = 0.5$

例题 补充

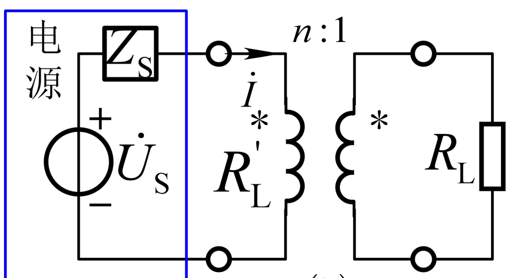
设图（a）所示电路中电源电压 $\dot{U}_S = 12\angle 0^\circ \text{V}$、内阻抗 $Z_S = (3 + \text{j}4)\Omega$

（1）图（a）中负载阻抗 $Z_L$ 可任意改变，求此电源可发出的最大功率。

（2）通过理想变压器接一电阻负载如图（b）所示，$R_L = 20\Omega$，问变比 $n$ 为多少，电源可发出最大功率，求此最大功率。



(a)



(b)

解 (1) 当 $Z_L = \overset{*}{Z}_S = (3 - \text{j}4)\Omega$ 电源发出最大功率

$$P_{max} = \frac{U_S^2}{4R_L} = \frac{12^2}{4\times 3}\text{W} = 12\text{W}$$

(2)图(b)中 $R_L$ 折算到理想变压器的原端为 模匹配

$$R_L' = n^2 R_L \quad 当 \quad R_L' = n^2 R_L = |Z_S| 时，$$

电源发出最大功率，即

$$n^2 R_L = \sqrt{(3\Omega)^2 + (4\Omega)^2} = 5\Omega \qquad n = \sqrt{5\Omega / 20\Omega} = 1/2$$

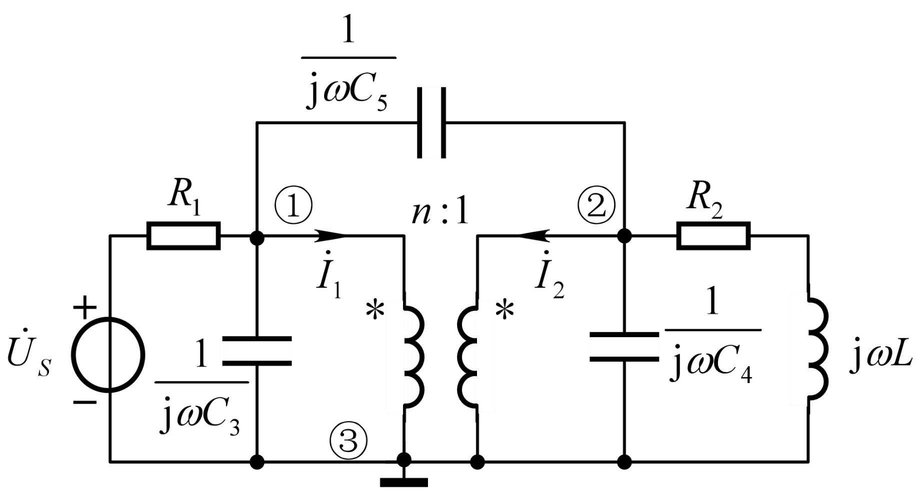
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z_S + n^2 R_L} = \frac{12\underline{/0^\circ}\text{V}}{(3+\text{j}4)\Omega + 20\Omega/4} = \frac{12\text{V}}{(8+\text{j}4)\Omega} = 1.34\underline{/-26.6^\circ}\text{A}$$

电源发出的最大功率

$$P_{max} = I^2 n^2 R_L = (1.34\text{A})^2 \times 20\Omega / 4 = 9\text{W}$$

例题 补充

列写图示电路的改进节点电压方程。




分析：图示电路含理想变压器，取节点③为参考点时节点①和②的节点电压也是理想变压器的端口电压。理想变压器是二端口元件，其端口电压、电流不服从欧姆定律，所以不能用自导纳和互导纳表示其参数。这时应采用改进节点电压法，即增加端口电流 $\dot I_1$ 、 $\dot I_2$ 为变量。

$$(\frac{1}{R}+j\omega C_3+j\omega C_5)\dot U_1-j\omega C_5\dot U_2+\dot I_1=\frac{\dot U_S}{R_1} \quad (1)$$

$$-j\omega C_5\dot U_1+(\frac{1}{R_2+j\omega L}+j\omega C_4+j\omega C_5)\dot U_2+\dot I_2=0 \quad (2)$$

$$\dot U_1=n\dot U_2 \quad (3)$$

$$\dot I_1=(-1/n)\dot I_2 \quad (4)$$

上述节点方程包含 $\dot I_1$、$\dot I_2$ 两个未知量，因此还要引用理想变压器本身的两个方程

方程(1)~(4)联立便可得解